ENIB 1ère année
1999/2000

Algèbre

Contrôle N° 1.

Calculatrices et documents interdits.

Exercice 1

On considère l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par :

$$f(x) = |1+x| + |1-x| - 2 \quad , \quad x \in E$$

1. On suppose $E = F = \mathbb{R}$.
   a. Etant donné un nombre réel x_0, comparer $f(x_0)$ et $f(-x_0)$.
   En déduire que f n'est pas injective.
   b. En distinguant suivant le signe de $1+x$ et de $1-x$, donner les différentes expressions de $f(x)$ ne faisant plus intervenir les valeurs absolues.
   c. Représenter graphiquement $f(x)$ et en déduire l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.
   L'application f est-elle surjective ?

2. On suppose maintenant que $E = [1, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}_+$.
   a. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
   b. Déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E.

Exercice 2

Sur $\mathbb{Z}$, on définit une relation R par :

$$x \, R \, y \iff x - y \text{ multiple de } 3$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Exprimer les classes d'équivalence.

Exercice 3

On fait passer un examen comportant deux épreuves notées de 0 à 20. On appelle x et y respectivement la note de la première et de la deuxième épreuve.
Dans l'ensemble des couples de notes possibles, noté N, on définit la relation binaire R par :

$$(x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \iff \begin{cases} \text{ou bien } & x_1 < x_2 \\ \text{ou bien } & x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

Montrer que cette relation est une relation d'ordre total sur N.

Exercice 4

On rappelle, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} ij \right).$$

Exercice 5

D'un jeu de 32 cartes, deux joueurs reçoivent chacun cinq cartes, au hasard.
L'un des joueurs a dans sa main, trois valets, un 8 et un Roi.

Quel est le nombre de possibilités pour que l'autre joueur ait dans sa main :

1. 3 cartes, exactement, de même valeur, supérieures aux valets, ou quatre cartes de même valeur ?
2. au moins un as et au plus deux rois ?

(On rappelle l'ordre des valeurs croissantes : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As).

Exercice 6

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si le module de z est égal à 1.

Problème

Soit X un ensemble non vide, on note $Perm(X)$ l'ensemble des permutations de X (ensemble des bijections de X dans X)

Soit A un ensemble non vide

et (A_1, A_2) une partition de A (c'est à dire que A_1 et A_2 sont des parties non vides de A, complémentaires l'une de l'autre dans A).

On notera P, l'ensemble des permutations f de A qui laissent invariant A_1 (c'est à dire que $f(A_1) = A_1 \quad \forall f \in P$).

1 – Soit p une permutation telle que $p \in P$

a – Montrer que $p(A_2) \cap A_1 = \emptyset$ et $p(A_2) \cup A_1 = A$

En déduire $p(A_2) = A_2$

b – Vérifier que l'application $p_1 : \begin{array}{ccl} A_1 & \longrightarrow & A_1 \\ x & \longmapsto & p(x) = p_1(x) \end{array}$ est une permutation de A_1

et que l'application $p_2 : \begin{array}{ccl} A_2 & \longrightarrow & A_2 \\ x & \longmapsto & p(x) = p_2(x) \end{array}$ est une permutation de A_2.

2 – Soit $\varphi : \begin{array}{ccl} P & \longrightarrow & Perm\, A_1 \times Perm\, A_2 \\ p & \longmapsto & (p_1, p_2) = \varphi(p) \end{array}$

a – Vérifier que φ est injective

b – Soit $(r, s) \in Perm\, A_1 \times Perm\, A_2$,

Soit $g : \begin{array}{ccl} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \begin{cases} r(x) & \text{si } x \in A_1 \\ s(x) & \text{si } x \in A_2 \end{cases} \end{array}$

vérifier que g est une permutation de A

En déduire que φ est surjective.

3 – Application, donner le nombre d'éléments de P lorsque $card\, A = 10$ et $card\, A_1 = 6$.