pour la rentrée, préparer les exos des 2 premières pages des feuilles sur les complexes

Bonnes Vacances !

ENIB 1ère année
1999/2000

Algèble.

Correction du Contrôle N° 1.

Ex 1.

1_ a_ $f(x_0) = |1-x_0| + |1-(-x_0)| - 2 \quad = |1-x_0| + |1+x_0| - 2$

$= |1+x_0| + |1-x_0| - 2$

$= f(x_0)$

Donc $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad f(x_0) = f(-x_0)$

f est donc une fonction paire, et non injective (puisqu'il existe deux éléments distincts ayant même image par la fonction f).

b_

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-2x-2$		0	$2x-2$

en effet $\quad |1-x| = \begin{cases} 1-x & x \leq 1 \\ x-1 & 1 \leq x \end{cases}$

$|1+x| = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \\ -1-x & x \leq -1 \end{cases}$

alors si $x \leq -1 \qquad |1-x| = 1-x \qquad |1+x| = -1-x$

$\Rightarrow f(x) = -1-x+1-x-2 = -2x-2$

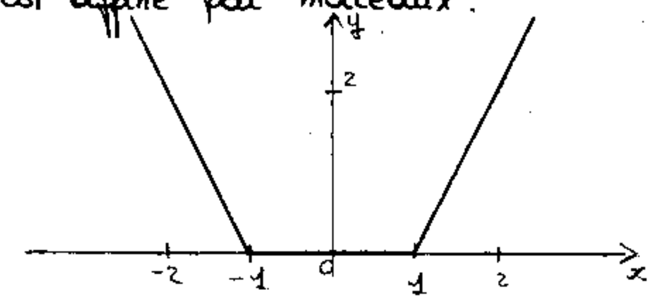
si $-1 \leq x \leq 1 \qquad |1-x| = 1-x \qquad |1+x| = 1+x$

$\Rightarrow f(x) = 1+x+1-x-2 = 0$

si $1 \leq x \qquad |1-x| = x-1 \qquad |1+x| = 1+x$

$\Rightarrow f(x) = 1+x+x-1-2 = 2x-2$.

c_ f est affine par morceaux.



Si $x \leq -1 \Rightarrow -2x \geq 2 \Rightarrow -2x-2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = 0$

$1 \leq x \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow 2x-2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$

f est continue par morceaux et atteint la valeur 0

D'où $\quad \mathrm{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$

et f n'est pas surjective, puisque $\mathrm{Im} f \neq F$. $\quad (F = \mathbb{R})$.

2 _ a _ $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = 2x-2$

b _ . $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+ \Rightarrow f$ surjective

. Soient $x, x' \in E$ tq $f(x) = f(x') \Rightarrow 2x-2 = 2x'-2 \Rightarrow x = x'$

$\Rightarrow f$ injective ..

f est bijective de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$, f^{-1} existe et est telle que si $f(x) = y$ alors $x = f^{-1}(y)$

$f(x) = y \iff 2x-2 = y \iff 2x = y+2 \iff x = \frac{y+2}{2}$.

D'où $x = f^{-1}(y)$

avec $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{2}$.

Ex2 C'est du cours ! $x \mathcal{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x-y = 3k$

1 _ . $\exists k = 0 \in \mathbb{Z},\ x - x = 3 \times 0 \Rightarrow \mathcal{R}$ réflexive

. on suppose $\exists k \in \mathbb{Z},\ x-y = 3 \times k$

alors $y - x = 3 \times (-k)$

donc $\exists k' = -k \in \mathbb{Z},\ y-x = 3 \times k' \Rightarrow \mathcal{R}$ symétrique

. on suppose $\exists k, k' \in \mathbb{Z}\ \ x-y = 3 \times k$ et $y - z = 3 \times k'$

$\Rightarrow x - z = x-y+y-z = 3 \times (k+k')$

donc $\exists k'' = k+k' \in \mathbb{Z}\ \ x - z = 3 \times k'' \Rightarrow \mathcal{R}$ transitive.

2 _ $cl(0) = \{y \ / \ y$ multiple de $3\} = 3\mathbb{Z}$

$cl(1) = \{y \ / \ y-1$ ——— $\} = 3\mathbb{Z}+1$

$cl(2) = 3\mathbb{Z}+2$

et c'est tout, $\{cl(0), cl(1), cl(2)\}$ forme une partition de $\mathbb{Z}$.

Ex3 . Si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ par def

$\Rightarrow \mathcal{R}$ réflexive

. Soit $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3)$

. si $x_1 < x_2$ et $x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3 \Rightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3)$

. si $x_1 < x_2$ et $(x_2 = x_3$ et $y_2 \leq y_3) \Rightarrow x_1 < x_3 \Rightarrow$ "

. si $(x_1 = x_2$ et $y_1 \leq y_2)$ et $x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3 \Rightarrow$ "

. si $(x_1 = x_2$ et $y_1 \leq y_2)$ et $(x_2 = x_3$ et $y_2 \leq y_3)$

alors $(x_1 = x_3$ et $y_1 \leq y_3) \Rightarrow (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3)$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ transitive.

. on suppose $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1)$

si $x_1 < x_2$, | Soit $x_2 < x_1$ impossible
| Soit $x_2 = x_1$ et $y_2 \leq y_1$ impossible

$\Rightarrow x_1 = x_2$ et $y_1 \leq y_2$, | Soit $x_2 < x_1$ impossible
| Soit $x_2 = x_1$ et $y_2 \leq y_1$

dans ce dernier cas $x_1 = x_2$ et $y_1 \leq y_2$ et $y_2 \leq y_1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ Antisymétrique.

Ex 4

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} i j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(i \sum_{j=i}^{n} j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(i\Big(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i-1} j\Big)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(i\Big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2}\Big)\Big)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2(i-1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{4}(n(n+1))^2 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times(n(n+1))^2 + \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\Big[\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{2n+1}{3}\Big]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\Big[\frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}n + \frac{2n+1}{3}\Big]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\Big[\frac{3n^2+7n+2}{6}\Big] = \frac{1}{4}n(n+1)\times\frac{(n+2)(3n+1)}{6}.$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$

Ex 5

1_ Soit les 3 cartes de même valeur, sont des dames ou des as,
dans ce cas, on choisit dame ou as C_2^1 choix
puis, on choisit 3 couleurs (parmi 4) C_4^3 choix
puis, on choisit 2 autres cartes qui ne sont pas de même valeur et différentes de celles déjà tirées, on choisit 2 cartes au hasard parmi $32-\underbrace{5}_{\text{cartes de l'autre joueur}}-\underbrace{4}_{\text{cartes de la valeur qu'on vient de tirer}} = 23$, C_{23}^2 choix.

$\Rightarrow$ dans ce cas, il y a $C_2^1 \times C_4^3 \times C_{23}^2$ choix.

Soit les 3 cartes de même valeur, sont les rois restants,
dans ce cas, on prend les 3 rois, 1 choix
puis on choisit 2 autres cartes parmi celles qui restent (on ne peut plus tirer de roi), parmi $32-5-3 = 24$, C_{24}^2 choix

$\Rightarrow$ dans ce cas, il y a C_{24}^2 choix.

$\Rightarrow$ Nb de possibilités $= C_2^1 \times C_4^3 \times C_{23}^2 + C_{24}^2$

2 – on choisit au moins un as, C_4^1 choix
reste à choisir 4 cartes, Soit on tire 0 Roi
——— 1 Roi
——— 2 Rois

et les autres cartes ne sont pas des rois (on a le choix parmi $32-5-\underbrace{1}_{\text{as choisi}}-\underbrace{3}_{\text{les as restants}}=23$)

Si on tire 0 Roi, il y a C_{23}^4 possibilités
——— 1 — , ——— $C_3^1 \times C_{23}^3$ ———
——— 2 Rois, ——— $C_3^2 \times C_{23}^2$ ———

D'où Nb de possibilités $= C_4^1\left[C_{23}^4 + C_3^1 \times C_{23}^3 + C_3^2 \times C_{23}^2\right]$.

Ex6. $\frac{1+z}{1-z}$ $z \neq 1$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = -\frac{1+z}{1-z}$

$\Leftrightarrow (1-z)\overline{(1+z)} = -(1+z)\overline{(1-z)}$

$\Leftrightarrow (1-z)(1+\bar{z}) = -(1+z)(1-\bar{z})$

$\Leftrightarrow 1+\bar{z}-z-z\bar{z}+1-\bar{z}+z-z\bar{z}=0$

$\Leftrightarrow 2-2z\bar{z}=0$

$\Leftrightarrow z\bar{z}=1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|=1.$

Concl $\frac{1+z}{1-z}$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases}|z|=1\\ z\neq 1.\end{cases}$

Pb

1_ Rem : p est injective et surjective.

a -- . $p(A_1) = A_1$ donc $p(A_2) \cap A_1 = p(A_2) \cap p(A_1)$

Soit $y \in p(A_2) \cap A_1 = p(A_2) \cap p(A_1)$

alors $\exists\, x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ tels que $x_1 \neq x_2$ (car $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
et $y = p(x_1) = p(x_2)$

or p injective $\Rightarrow x_1 = x_2$! impossible

D'où $p(A_2) \cap A_1 = \emptyset$

. $p(A_2) \cup A_1 = p(A_2) \cup p(A_1) = p(A_1 \cup A_2) = p(A)$

or p surjective

donc $p(A) = A$

d'où $p(A_2) \cup A_1 = A$.

. on a $p(A_2) \cap A_1 = \emptyset$ et $p(A_2) \cup A_1 = A$

donc $p(A_2) =$ complémentaire de A_1

or $A_2 =$

D'où $p(A_2) = A_2$.

b -- . p_1 est injective car p l'est

$p_1(A_1) = p(A_1) = A_1 \Rightarrow p_1$ surjective

$\Rightarrow p_1$ permutation

. p_2 est une permutation pour les mêmes raisons ($p(A_2) = A_2$).

2_ a -- Soient $p, q \in P$ tels que $\varphi(p) = \varphi(q)$

$\Leftrightarrow (p_1, p_2) = (q_1, q_2)$

$\Leftrightarrow p_1 = q_1$ et $p_2 = q_2$

Soit $x \in A$, comme $A = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Soit $x \in A_1$

Soit $x \in A_2$

$\Rightarrow$ si $x \in A_1$ alors $p(x) = p_1(x) = q_1(x) = q(x)$

si $x \in A_2$ alors $p(x) = p_2(x) = q_2(x) = q(x)$

Donc $\forall x \in A$, $p(x) = q(x)$

$\Rightarrow p = q$

et donc φ injective.

b – • $g(A) = g(A_1 \cup A_2) = g(A_1) \cup g(A_2) = r(A_1) \cup s(A_2)$

or $r(A_1) = A_1$, car r et s sont surjectives
$s(A_2) = A_2$

Donc $g(A) = A_1 \cup A_2 = A$ $\Rightarrow$ g surjective.

• Soient $x, x' \in A$ tels que $g(x) = g(x')$
il y a 3 cas

• $x \in A_1$ et $x' \in A_1$
$\Rightarrow$ $g(x) = r(x) = g(x') = r(x')$
$\Rightarrow$ comme r inj $x = x'$

• $x \in A_2$ et $x' \in A_2$
$\Rightarrow$ $g(x) = s(x) = g(x') = s(x')$
$\Rightarrow$ comme s inj $x = x'$

• $x \in A_1$ et $x' \in A_2$ (ou $x \in A_2$ et $x' \in A_1$)
$\Rightarrow$ $g(x) = r(x) = g(x') = s(x')$
or $r(x) \in A_1$
$s(x') \in A_2$
et $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
c'est impossible

Donc $x = x'$
$\Rightarrow$ g injective.

Donc g est une permutation.

De plus, $g(A_1) = r(A_1) = A_1$ $\Rightarrow$ $g \in P$
et par def de φ, $\varphi(g) = (r, s)$

Donc $\forall (r, s) \in \text{Perm } A_1 \times \text{Perm } A_2$
$\exists g$ (défini comme dans l'énoncé) $\in P$
tel que $\varphi(g) = (r, s)$

$\Rightarrow$ φ surjective.

Finalement φ bijective de P sur $\text{Perm } A_1 \times \text{Perm } A_2$.

c – card P = card $(\text{Perm } A_1 \times \text{Perm } A_2)$
= card $(\text{Perm } A_1) \times$ card $(\text{Perm } A_2)$

or card $A_1 = 6$ $\Rightarrow$ card $(\text{Perm } A_1) = 6!$
card $A_2 = 10 - 6 = 4$ $\Rightarrow$ card $(\text{Perm } A_2) = 4!$

D'où card $P = 6! \times 4!$