ENIB 1ère année
1999/2000

Algèbre.

Contrôle N°2

documents interdits.

Exercice

On considère la fonction f qui a tout $z \in \mathbb{C}$ fait correspondre :

$$f(z) = z\, e^{z(\bar{z}+1)}$$

1. On pose $z = x + iy$ (x et y éléments de $\mathbb{R}$).
Calculer en fonction de x et de y la partie réelle, la partie imaginaire et le module de $f(z)$.

2. A quelle condition doivent satisfaire x et y pour que l'image de $f(z)$ dans le plan complexe se déduise de l'image de $z = x+iy$ par une rotation autour de l'origine ?
Quel est alors le lieu de l'image de z ?
Exprimer l'angle θ de la rotation en fonction de x et de y.

3. Soit $M(z)$ et $M'(f(z))$, on appelle M'' le transformé de M par la rotation de centre O et d'angle θ donné, $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Comment doit-on choisir z pour que les points M' et M'' soient confondus ?

Problème.

On rappelle qu'une similitude de centre $A(a)$, de rapport $b \in \mathbb{C}$, notée $s_a(b)$ est telle que :

$$M'(z') = s_a(b)(M(z)) \iff z' - a = b(z-a).$$

1. Montrer que $\{s_a(b)\}_{a,b\in\mathbb{C}}$ est un groupe pour la loi de composition.

2- On considère les similitudes définies par :

$$z' = 2uz + \frac{1}{2} + i + u \qquad u \in \mathbb{C}$$

a- Exprimer a en fonction de u, $a = T(u)$.
b. Ecrire T sous forme canonique.
c- Déterminer, analytiquement, l'équation de l'ensemble décrit par $A(a)$ lorsque les similitudes sont des homothéties. (Détaillez les calculs).

3-
a- Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^4 + (5-i)\,z^2 + 4 - 4i = 0$$

b- En déduire que

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$\text{et } \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

c- On considère les similitudes définies par :

$$z' = u^2 z + 4 - 4i + (5-i)\,u^2 + u^4 \qquad u \in \mathbb{C}$$

Déterminer les similitudes centrées en O (donner l'expression analytique et l'interprétation géométrique d'une seule).

4- On considère les similitudes définies par :

$$z' = \left(\frac{2}{1+u}\right)^6 z + 1 + 4i + u^2 \qquad u \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}.$$

Déterminer les u tels que l'équation soit celle d'une homothétie de rapport 1.

5- On considère l'inversion de centre O, de rapport 9, $I(O, 9)$.

Déterminer analytiquement et géométriquement les images par l'inversion des ensembles suivants :

D : $x = 3$
D' : $y = 2x$
D'' : $y = 2x + 1$
C : $|z| = 1$
C' : $|z - 1| = 1$

(Expliquez les calculs et les constructions).

6- Soient les similitudes définies par

$$z' = -u z + \sqrt{3}\, i + u \qquad u \in \mathbb{C}$$

a- Soit T la transformation ponctuelle qui à $M(u)$ associe $M'(u')$ tel que

$$u' = \frac{u + i\sqrt{3}}{u + 1}$$

Ecrire T sous forme canonique

b- Déterminer géométriquement les images par T des ensembles suivants

D : $y = 2x$

C : $|z| = 1$

(Détaillez les constructions)

c- Déterminer l'équation des ensembles décrit par $A(a)$ lorsque

* $M(u)$ décrit la droite d'équation $y = 2x+2$.
* $M(u)$ décrit le cercle de centre $(0,-1)$ et de rayon 1

(Détaillez les calculs)

7- a- Linéariser $(\cos\theta)^7$

b- Exprimer $\sin 7\theta$ en fonction de puissances de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

Bonnes Vacances !!!