ENIB 1e Année

1999/2000

Algèble

Corrigé partiel du Contrôle N°2.

Exercice

1. $f(x+iy) = (x+iy)\, e^{(x+iy)(x+1-iy)}$

$= (x+iy)\, e^{(x(x+1)+y^2)}\, e^{iy}$

$= (x\cos y - y\sin y)\, e^{x^2+y^2+x} + i\,(x\sin y + y\cos y)\, e^{x^2+y^2+x}$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(f(z)) = (x\cos y - y\sin y)\, e^{x^2+y^2+x}$

$\operatorname{Im}(f(z)) = (x\sin y + y\cos y)\, e^{x^2+y^2+x}$

et $|f(z)| = |(x+iy)\, e^{x^2+y^2+x}\, e^{iy}| = |z|\, e^{x^2+y^2+x}$

2 _ Soit $M(z)$, $M'(f(z))$

M' est l'image de M par une rotation autour de l'origine

$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad M' = Rot(0,\theta)(M)$

$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad f(z) = e^{i\theta} \times z \quad \Leftrightarrow \quad |f(z)| = |z|.$

$\Leftrightarrow e^{x^2+y^2+x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}((-\frac{1}{2},0), \frac{1}{2}).$

on a alors

$f(z) = z e^{iy} = z e^{i\theta}$

$\begin{cases} \text{pour } z \neq 0 & \theta \equiv y\ (2\pi) \\ \text{pour } z = 0 & \theta \text{ quelconque}. \end{cases}$

3 _ On cherche z tel que $M' = Rot(0, \frac{1}{4})(M) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{C}((-\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) \\ \text{et} \\ y \equiv \frac{1}{4}\ (2\pi) \end{cases}$ ou $M = 0$

Seule la droite D d'équation $y = \frac{1}{4}$ coupe le cercle $\mathcal{C}((-\frac{1}{2},0),\frac{1}{2})$

donc $M' = Rot(0, \frac{1}{4})(M) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ ou $M = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + i\frac{1}{4}\right) \\ \text{ou} \\ M = M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} + i\frac{1}{4}\right). \\ \text{ou} \\ M = 0 \end{cases}$

Problème (Indications)

1. $s_a(b) = \tau_a \circ s_0(b) \circ \tau_{-a}$ et $\{s_0(b)\}_{b \neq 0}$ groupe cf cours.

2. $z' - a = 2u(z-a)$ $\quad u \neq \frac{1}{2}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sinon on a pas une similitude} \\ z' = 2uz + \frac{1}{2} + i + u \end{array} \right.$

$a = \dfrac{\frac{1}{2} + i + u}{1 - 2u} \quad \Rightarrow \quad T(u) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{i5\pi/4}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{u - \frac{1}{2}}.$

$\Omega(u)$ et $\Omega'(T(u))$

$\Omega' = T_{\frac{1}{2}i} \circ Rot\left(O, \frac{5\pi}{4}\right) \circ I\left(O, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \circ Sym_{/Ox} \circ T_{-\frac{1}{2}i}(\Omega).$

Déterminer l'image de la dte d'équa° $y = 0$.

$T(\mathcal{D}) = \mathcal{D}' \qquad \mathcal{D}' : y = x + \frac{1}{2}.$

3. on pose $Z = z^2$

$Z^2 + (5-i)Z + 4 - 4i = 0 \qquad \Delta = 8 + 6i$

$\Rightarrow$ méthode de détermination de δ tq $\delta^2 = \Delta$

$\delta = \pm(3+i)$

$\Rightarrow Z = -4$ ou $i - 1 = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}$

$\Rightarrow z = 2i, -2i, \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{3i\pi/8}, -\sqrt{\sqrt{2}}\, e^{3i\pi/8}$

or $i - 1 = z^2 \Rightarrow z = \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}\right]$

D'où les valeurs de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Si $a = 2i \Rightarrow z' = -4z$ correspond à une homothétie $H(O, -4)$.

4. conditions $\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{1+u}\right)^6 = 1 \\ \text{et} \\ 1 + 4i + u^2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u = 2e^{ik\pi/3} - 1 \qquad 0 \leq k \leq 5 \\ \text{et} \\ u = \pm\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}\right) \end{array} \right.$

Sol $= \emptyset$.

5. . $I(O,9)(\mathcal{D})$ est un cercle $\mathcal{C}$ passant par O

en utilisant $x = \dfrac{9x'}{x'^2 + y'^2}$ et $y = \dfrac{9y'}{x'^2 + y'^2}$

$\mathcal{C} \leadsto \mathcal{C}\left(\left(\frac{3}{2}, 0\right), \frac{3}{2}\right)$

. $I(O,9)(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$ $\quad \mathcal{D}'$ passe par O

. $I(O,9)(\mathcal{D}'')$ est un cercle $\mathcal{C}''$ passant par O

$\mathcal{C}'' \to \mathcal{C}\left(\left(-9, \frac{9}{2}\right), \frac{\sqrt{405}}{2}\right)$

. $I(O,9)(C)$ est un cercle $\mathcal{C}'''$ homothétique, rapport de l'homothétie $\frac{9}{-1} = -9$

$\mathcal{C}''' \to \mathcal{C}((0,0), 9).$

. $I(O,9)(C')$ est une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O

$\mathcal{D} \leadsto x = \frac{9}{2}.$

$$T(u) = 1 + (i\sqrt{3}-1) \times \frac{1}{u+1} = 1 + 2e^{2i\pi/3} \times \frac{1}{1+u}.$$

la suite se fait en utilisant les méthodes des T.D.

$$\sin 7\theta = 7\cos^6\theta \sin\theta - 35\cos^4\theta \sin^3\theta + 21\cos^2\theta \sin^5\theta - \sin^7\theta$$

$$(\cos\theta)^7 = \frac{1}{64}\left(\cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta\right).$$