1ère année
1999/2000

Algèble.

Devoir N°3.

Documents non autorisés

Lisez TOUT l'énoncé avant de commencer !!!
(y compris les questions)

Ne pas oublier de Conclure

Exercice 1 (20 minutes)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\frac{X^2+4}{(X-1)^2(X^3-8)}$$

(Expliquer les calculs).

Exercice 2 (20 minutes)

Un phare émet un signal jaune toutes les 15 min et un signal rouge toutes les 28 min.
On aperçoit le signal jaune à 0h02 min et le rouge à 0h08 min

A Quelle heure verra-t-on pour la première fois les 2 signaux émis en même temps ?

(citer les méthodes ou Théorèmes utilisés).

Exercice 3 (1 heure)

$E = \mathcal{C}^2([0,1])$, espace vectoriel réel des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ (en particulier les fonctions, leur dérivée, et leur dérivée seconde sont continues)

On appelle $\mathcal{S}$ le ss-ensemble de E formé des fonctions s telles que

- sur $[0,\frac{1}{2}]$ s soit la restriction d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.
- sur $[\frac{1}{2},1]$ s ______________

1| Soit g la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, définie par

si $x \in [0,\frac{1}{2}]$ $g(x) = 2x^2 - x + 1$

si $x \in]\frac{1}{2},1]$ $g(x) = ax^3 + bx + c$ $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Déterminer a,b,c pour que $g \in \mathcal{S}$

2| Montrer que $\mathcal{S}$ est un s.e.v de E

3| Soit $\mathcal{S}_0$ le ss-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué des fonctions s telles que

$$\forall x \in [0,\tfrac{1}{2}] \quad s(x) = 0$$

Montrer que $\mathcal{S}_0$ est le sous e.v de $\mathcal{S}$ engendré par l'application e_4 définie par si $x \in [0,\frac{1}{2}]$ $e_4(x) = 0$

si $x \in]\frac{1}{2},1]$ $e_4(x) = (x-\frac{1}{2})^3$. (penser à Taylor)

4| On définit les quatre applications e_0, e_1, e_2, e_3 de $[0,1]$ ds $\mathbb{R}$ par

$\forall x \in [0,1]$
$$e_0(x) = 1$$
$$e_1(x) = x$$
$$e_2(x) = x^2$$
$$e_3(x) = x^3$$

Soit $\mathcal{S}_1 = \text{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3)$ s.e.v de $\mathcal{S}$

Montrer que. $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ sont supplémentaires dans $\mathcal{S}$

Donner alors les coordonnées de g (du 1|) dans la base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ (On justifiera cette propriété de la famille $\mathcal{B}$).

5| On considère l'application ϖ de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^5$ définie par

$$\varpi(s) = (s(0), s(\tfrac{1}{2}), s(1), s'(0), s'(1))$$

Montrer que ϖ est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^5$

Déterminer $(\varpi(e_i))_{0 \le i \le 4}$

Exercice 4 (20 minutes)

$n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, d^\circ P \leq n\}$

Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que f possède dans $\mathbb{C}$, n racines $z_1, z_2, \dots, z_n$ telles que $|z_1| < |z_2| < \dots < |z_{n-1}| < |z_n|$, et que f soit un polynôme unitaire

1] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
Montrer que Q défini par $\forall x \in \mathbb{R}$ $Q(x) = P(x)\,P(-x)$ est un polynôme pair

2] a- En déduire $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\exists \hat{P} \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\hat{P}(x^2) = P(x)\,P(-x)$
(écrire P en fonction de ses racines).

b- Montrer que on définit une application $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto \hat{P}$
et que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ $\Phi(PQ) = \Phi(P)\,\Phi(Q)$

c- Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$
exprimer $\Phi(P)$ en fonction de $x_1, \dots, x_n$.

3] On considère la suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $P_0 = f$
et $\forall k \in \mathbb{N}$ $P_{k+1} = (-1)^n\,\Phi(P_k)$

On note α_k le coefficient du terme de degré $n-1$ de P_k.

a- Déterminer les racines de P_k (exprimer $P_0, P_1, \dots, P_k$).

b- Exprimer α_k en fonction de k et des racines de f

4] Déterminer

$$\lim_{k \to +\infty} |\alpha_k|^{(1/2^k)}$$

(utiliser les inégalités de l'énoncé).

Exercice 5. (1 heure)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres réels non nuls
et α le plus petit des n réels $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$.

On considère les 3 matrices carrées d'ordre n définies par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M = A - D}.$$

1) Majoration de α quand A n'est pas inversible.

Dans toute cette question, on suppose que la matrice A n'est pas inversible

a) Montrer qu'il existe n nombres réels $x_1, \dots, x_n$ non tous nuls tels que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que pour $1 \leq i \leq n$, on a
$$\alpha |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |x_j| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{i-1}| + |x_{i+1}| + \dots + |x_n|.$$

c) En déduire, par sommation de ces inégalités, que $\alpha \leq n-1$.

2) Etude d'une suite de matrices-colonnes.

Dans toute cette question, on suppose $\alpha > n-1$, donc A inversible
. Etant donnés n nombres $b_1, \dots, b_n$ réels, il existe donc n nombres $x_1, \dots, x_n$ réels uniques tels que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ que l'on note $\underline{AX = B}$.

a) Etablir que $X = -D^{-1} M X + D^{-1} B$

. Etant donnés une matrice colonne à n lignes notée U_0, on définit une suite de matrices colonnes par la relation : $\underline{U_{k+1} = -D^{-1} M U_k + D^{-1} B}$.

et on pose $U_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$

b) Etablir que $U_{k+1} - X = -D^{-1} M (U_k - X)$

En déduire $$\sup_{1 \leq j \leq n} |x_{k+1,j} - x_j| \leq \frac{n-1}{\alpha} \sup_{1 \leq j \leq n} |x_{k,j} - x_j|.$$

c) En déduire que pour $1 \leq j \leq n$ $(x_{k,j})_k$ tend vers x_j.

3] Premier Exemple.

On considère le système $AX=B$ et la matrice U_0 suivants :

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a] Déterminer x_1, x_2, x_3 (utiliser le pivot de Gauss)

b] Déterminer U_1, U_2, U_3 de la suite (U_k) définie au 2]
Comparer U_3 à la solution exacte X du syst $AX=B$.

4] Deuxième exemple.

On considère le système $AX=B$ et U_0 suivants :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a] Déterminer x_1, x_2, x_3 (pivot de Gauss)

b] Déterminer U_1, U_2, U_3, puis U_k
Que se passe-t-il ?