Enib 1ère année
1999/2000

Devoir d'Algèbre.

Documents non autorisés.

Les réponses proposées, ainsi que les calculs devront être expliqués et justifiés.

Exercice 1.

Dans cet exercice de calcul de déterminants, vous devez obtenir des résultats JUSTES.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

On considère le système suivant, d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$, de paramètre complexe m.

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Déterminer les inconnues principales, équations principales, paramètres, en fonction de m, et dans chacun des cas déterminer (x,y,z).

Exercice 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ -9 & -8 & -9 \\ -9 & -9 & -8 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1) Calculer les valeurs propres de f.
Peut-on dire a priori si f est diagonalisable ou non ?

2) Déterminer les sous-espaces propres.

3) Montrer que f est diagonalisable.
Calculer la matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres et en déduire la matrice diagonale $D = P^{-1} A P$ associée à f dans cette base.

Exercice 4

Soit $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{ij} = \inf(i;j) \qquad 1 \leq i \leq n \ , \ 1 \leq j \leq n.$$

L'objet de cet exercice est de déterminer les valeurs propres de A_n

1- On ne demande pas dans cette question de calculer les valeurs propres.

a- Montrer que $\det A_n = \det A_{n-1}$
En déduire le rang de A_n

b- Démontrer alors que toutes les valeurs propres de A_n sont non nulles et de produit 1.
(Utiliser le fait que les valeurs propres sont les racines de $P(\lambda) = \det(A_n - \lambda I_n)$).

2- Soit P_n le polynôme de degré n défini par
$P_0(x) = 1$ et $P_n(x) = \det(I_n - x A_n)$ pour $n \geq 1$.

a- Déterminer $P_1(x)$

b- Montrer que $(*)$ $P_n(x) = (2-x)\, P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$, $n \geq 2$

3- On pose $x = 2(1 - \cos(2\Phi))$ $\quad \Phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$P_n(x)$ devient alors par ce changement de variable, un polynôme $Q_n(\Phi)$

a- Calculer $Q_0(\Phi)$
Vérifier que $Q_1(\Phi) = \dfrac{\cos(3\Phi)}{\cos\Phi}$.

b- Montrer (en utilisant $(*)$) par récurrence sur n que l'on a
$Q_n(\Phi) = \cos((2n+1)\Phi) / \cos\Phi$ pour $n \geq 0$.

c- Résoudre alors dans $\mathbb{R}$, l'équation $Q_n(\Phi) = 0$
(On montrera que cette équation admet dans $[0, \pi/2]$, n racines réelles distinctes).

4- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

a- Montrer l'équivalence

$$\lambda \text{ valeur propre de } A_n \iff \frac{1}{\lambda} \text{ racine de } P_n.$$

En déduire les valeurs propres de A_n

b- La matrice A_n est-elle diagonalisable ? (Expliquez).

Exercice 5

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{t^2-1} \\ y(t) = \left(\dfrac{t+1}{t}\right)^2 \end{cases}$$

1. Donner le tableau de variat° de x et y.

2. Etudier les branches infinies.

3. Déterminer les points doubles

4. Déterminer les points d'intersection entre la courbe et les asymptotes.

5. Tracer la courbe.

6. Rechercher si il y a lieu un éventuel point d'inflexion.
   (On n'explicitera pas ce point).