Devoir Surveillé d'Analyse $1^{ère}$ Année

Octobre 99 : Equations Différentielles Linéaires

– Durée : 1 heure 30 minutes –

Une Seule Feuille A4 avec Notes Manuscriptes Autorisée,

Machines à Calculer Non Autorisées.

NOM :
Prénom :
Groupe :

Bien lire TOUT l'énoncé

Ce devoir consiste en un questionnaire à choix multiple. Il peut y avoir une ou plusieurs réponses correctes à chacunes des questions. Chaque réponse est notée d'après son importance selon les critères suivants : connaissance du cours, raisonnement, calcul, rédaction. Les bonnes réponses ajoutent des points, les ommitions restent neutres et les erreurs sont sanctionnées en fonction de leur gravité.

Pour répondre aux questions, il suffit de **cocher les repères** des réponses proposées correspondant à votre choix. Au cas où aucunes des réponses proposées ne conviendrait **et uniquement dans ce cas sous peine de nullité**, il faut faut cocher le repère $\boxed{\textit{autre}}$ et uniquement celui–ci, puis donner une proposition de réponse à partir de l'intitulé : "*autre réponse*".

Les questions sont indépendentes.

1. Soit a un réel. On peut affirmer que :

(a) $ax+b=3x+1 \iff \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$.

(b) Pour x réel, il existe b réel tel que : $ax+b=3x+1$.

(c) Il existe un réel b tel que : $ax+b=3x+1$ pour tout x réel.

(d) Pour b réel : $\forall x \in I\!R,\ ax+b=3x+1 \iff \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$.

→

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

2. Soit ω un réel non nul. Soient A et B deux réels. On peut certifier que :

(a) $\forall t \in I\!R, A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{6})=\sin(\omega t) \iff \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ t=\frac{\pi}{4\omega} \end{cases}$.

(b) L'égalité : $\forall t \in I\!R, A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{6})=\sin(\omega t)$
est toujours fausse quelles que soient les valeurs de A et B.

(c) L'égalité : $\forall t \in I\!R, A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{6})=\sin(\omega t)$
est vérifiée pour $A=\sqrt{3}$ et $B=-2$

(d) L'égalité : $\forall t \in I\!R,\ A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{6})=\sin(\omega t)$
est vérifiée pour $A=\dfrac{1}{2}$ et $B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

→

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

3. Considérer l'équation différentielle (E) sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ d'inconnue $y :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to I\!R$:

$$(E) : \forall t \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[,\ y'(t)-y^2(t)=1$$

On peut affirmer que :

(a) La fonction constante $t \mapsto -1$ est solution particulière de (E) sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

(b) Les solutions de (E) sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sont les $y : t \mapsto -1+\lambda e^{t^2}$, où $\lambda \in I\!R$

(c) La fonction $t \mapsto \tan t$ est solution de (E) sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

$\rightarrow$

a	b	c	*autre*

autre réponse :

4. Soit ξ un réel non nul.

   Considérer l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ d'inconnue $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R},\ p'(x) + \frac{p(x)}{\xi} = 1$$

   Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les :

   (a) $p : x \mapsto 1 - e^{-\frac{x}{\xi}}$ où $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $p : x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x}{\xi}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) $p : x \mapsto \xi - \lambda e^{-\frac{x}{\xi}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (d) $p : x \mapsto \xi + \lambda e^{-\xi x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

5. Considérer l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ d'inconnue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) - 5f(t) = e^{5t}$$

   Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les :

   (a) $f : t \mapsto Ae^{5t}$ où A est un réel quelconque.

   (b) $f : t \mapsto (A + t)e^{5t}$ où A est un réel quelconque.

   (c) $f : t \mapsto (A - t)e^{5t}$ où A est un réel quelconque.

   (d) $f : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{5t}$ où λ et μ sont des réels quelconques.

$\rightarrow$

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

6. Considérer l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ d'inconnue $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) - e^t x(t) = 0$$

   (a) (E) est linéaire, à coefficients constants.

(b) (E) est linéaire, à coefficients non constants.

(c) (E) est non linéaire.

(d) La fonction nulle est solution de (E) sur $I\!R$

(e) Les fonctions x définies par : $x : t \mapsto Ce^{e^t}$ où $C \in I\!R$ sont des solutions de (E) sur $I\!R$.

a	b	c	d	e	*autre*

$\rightarrow$ *autre réponse :*

7. Soit l un réel non nul.

Considérer l'équation différentielle (E) sur $I\!R$ d'inconnue $y : I\!R \rightarrow I\!R$:

$$(E) : \forall x \in I\!R,\ y'(x) + 3y(x) = e^{\frac{x}{l}}$$

Pour résoudre (E) sur $I\!R$, on peut écrire :

(a) (E) étant une équation différentielle linéaire à coefficients constants, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution de (E) les solutions de l'équation homogène associée.

(b) On cherche une solution y_p de la forme $y_p : x \mapsto Ae^{\frac{x}{l}}$ où $A \in I\!R$.
Soient donc $A \in I\!R$ et $y_p : x \mapsto Ae^{\frac{x}{l}}$
y_p solution de (E) s'écrit : $\forall x \in I\!R,\ y_p'(x) + 3y_p(x) = e^{\frac{x}{l}}$,
i.e. $\forall x \in I\!R,\ \dfrac{A}{l}e^{\frac{x}{l}} + 3Ae^{\frac{x}{l}} = e^{\frac{x}{l}}$,
i.e. $A = \dfrac{l}{3l+1}$ car $\forall x \in I\!R,\ e^{\frac{x}{l}} \neq 0$.
Les solutions de (E) sont donc les $y : x \mapsto \dfrac{l}{3l+1}e^{\frac{x}{l}} + \lambda e^{-3x}$ $(\lambda \in I\!R)$.

(c) Cette équation différentielle (E) n'admet de solution particulière si $l = -\dfrac{1}{3}$.

(d) Cette équation différentielle (E) n'est pas une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

a	b	c	d	*autre*

$\rightarrow$ *autre réponse :*

8. Soit $E_0 \in I\!R$.

Considérer l'équation différentielle (E) sur $I\!R$ d'inconnue $u : I\!R \to I\!R$:

$$(E) : \forall x \in I\!R,\ \frac{1}{4}u'(x) + u(x) = E_0$$

Les solutions éventuelles u de (E) vérifiant la condition initiale $u(0) = 0$ sont :

(a) La fonction $u : x \mapsto E_0 - E_0 e^{-x}$.

(b) Les fonctions $u \mapsto E_0(1 - e^{-x}) + \lambda e^{-x}$ où $\lambda \in I\!R$.

(c) La fonction $u : x \mapsto 4E_0 - 4E_0 e^{-4x}$.

(d) Les fonctions $u \mapsto 4E_0(1 - e^{-4x}) + \lambda e^{-4x}$ où $\lambda \in I\!R$.

→

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

9. Trouvons les solutions de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \forall x \in I\!R,\ f'(x) + 3f(x) - 1 = 0$$

(a) (E) est homogène et le trinôme associé est : $T(X) = X^2 + 3X - 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 13$.
$\Delta > 0$, donc les solutions de (E) sur $I\!R$ sont les fonctions f qui s'écrivent :
$f : x \mapsto \lambda e^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}x} + \mu e^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}x}$ où $(\lambda, \mu) \in I\!R^2$.

(b) (E) est homogène et le trinôme associé est : $T(X) = X^2 + 3X - 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 13$.
$\Delta > 0$, donc les solutions de (E) sur $I\!R$ sont les fonctions f qui s'écrivent :
$f : x \mapsto \lambda e^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}x} + \mu e^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}x}$ où $(\lambda, \mu) \in I\!R^2$.

(c) (E) n'est pas homogène est ses solutions s'écrivent :
$f : t \mapsto \dfrac{1}{3} + Ae^{-3t}$ où $A \in I\!R$.

→

a	b	c	*autre*

autre réponse :

8. Soit $E_0 \in \mathbb{R}$.

Considérer l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ d'inconnue $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{4}u'(x) + u(x) = E_0$$

Les solutions éventuelles u de (E) vérifiant la condition initiale $u(0) = 0$ sont :

(a) La fonction $u : x \mapsto E_0 - E_0 e^{-x}$.

(b) Les fonctions $u \mapsto E_0(1 - e^{-x}) + \lambda e^{-x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) La fonction $u : x \mapsto 4E_0 - 4E_0 e^{-4x}$.

(d) Les fonctions $u \mapsto 4E_0(1 - e^{-4x}) + \lambda e^{-4x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

a	b	c	d	*autre*

→ *autre réponse :*

9. Trouvons les solutions de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 3f(x) - 1 = 0$$

(a) (E) est homogène et le trinôme associé est : $T(X) = X^2 + 3X - 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 13$.
$\Delta > 0$, donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f qui s'écrivent :
$f : x \mapsto \lambda e^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}x} + \mu e^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(b) (E) est homogène et le trinôme associé est : $T(X) = X^2 + 3X - 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 13$.
$\Delta > 0$, donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f qui s'écrivent :
$f : x \mapsto \lambda e^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}x} + \mu e^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(c) (E) n'est pas homogène est ses solutions s'écrivent :
$f : t \mapsto \frac{1}{3} + Ae^{-3t}$ où $A \in \mathbb{R}$.

a	b	c	*autre*

→ *autre réponse :*

(e) Que l'ordre de (E) soit 1 ou 2, il existe une infinité de solutions f vérifiant (E) et (I_0).

→

a	b	c	d	e	*autre*

autre réponse :

12. Considérer l'équation différentielle (E) d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \sin t$$

Pour rédiger la résolution de (E) on peut écrire :

(a) (E) n'est pas une équation linéaire à coefficients constants donc je ne suis pas sûr de pouvoir la résoudre au moins en partie avec les connaissances du cours de première année du premier trimestre.

(b) L'équation homogène (E_0) associée à (E) admet comme équation caractéristique $x^2 + 2x + 2 = 0$, dont les racines complexes r_1 et r_2 sont : $r_1 = 1 + i = \overline{r_2}$. Donc les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les $y : t \mapsto e^t A \sin(t + \psi)$ où A et ψ sont deux constantes réelles.

(c) L'équation homogène (E_0) associée à (E) admet comme équation caractéristique $x^2 + 2x + 2 = 0$, dont les racines complexes r_1 et r_2 sont : $r_1 = -1 + i = \overline{r_2}$. Donc les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les $y : t \mapsto e^{-t} A \cos(t + \psi)$ où A et ψ sont deux constantes réelles.

(d) On remarque que la fonction y_1 définie par $t \overset{y_1}{\mapsto} e^{-t}\left[\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right]$ est solution de (E), donc les solutions de (E) s'écrivent comme les sommes de y_1 avec une solution de (E_0).

(e) On remarque que la fonction y_1 définie par $t \overset{y_1}{\mapsto} te^{-t}\left[\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right]$ est solution de (E), donc les solutions de (E) s'écrivent comme les sommes de y_1 avec une solution de (E_0).

→

a	b	c	d	e	*autre*

autre réponse :

13. Soit $g : t \mapsto \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{array} \right.$.

Considérer l'équation différentielle (E) d'inconnue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(E) : f'' + 2f' - f = g$$

(a) Il n'existe pas de solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, il faut une seule constante d'intégration.

(c) Pour exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, il faut deux constantes d'intégration.

(d) Pour exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, il faut quatre constantes d'intégration.

(e) Pour exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, il faut six constantes d'intégration.

(f) Pour exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, il faut huit constantes d'intégration.

(g) Il existe une infinité de solutions de l'équation homogène associée à (E) qui admettent une limite nulle en $+\infty$.

→

a	b	c	d	e	f	g	*autre*

autre réponse :

14. Pour résoudre une équation différentielle linéaire, à coefficients réels constants, du premier ou du second ordre, d'inconnue à valeurs réelles, il est intéressant de passer par une équation différentielle d'inconnue à valeurs complexes lorsque le second membre de l'équation à valeurs réelles est :

(a) Une constante.

(b) Un trinôme dont le discriminant est négatif.

(c) Une fonction sinusoïdale ($t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$, où $(A, \omega, \phi) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$).

(d) Une fonction exponentielle ($t \mapsto e^{\alpha t}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$).

→

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :