Devoir Surveillé d'Analyse $1^{ère}$ Année

Décembre 99 : Trigonométrie et équations différentielles

– Durée : 2 heures –

Seule Une Feuille A4 Recto–Verso Manuscripte est Autorisée,

Machines à Calculer Non Autorisées.

NOM :
Prénom :
Groupe :

Bien lire TOUT l'énoncé

Répondre aux questions suivantes **sur cet énoncé**. Une grande attention sera observée quant à la **rédaction de l'enchaînement logique** des expressions apportées.

Les exercices, les problèmes sont indépendants.

Ce sujet comporte 6 feuilles, celle–ci comprise.

NOM :

Exercices

1. Prouver que : $\forall(\alpha,\phi)\in I\!R^2,\ \cos^2\phi+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\phi=\cos^2\alpha+\cos^2\phi\cdot\sin^2\alpha$.

2. Prouver que pour α et ϕ réels : $\cos\alpha\cdot\cos\phi=1 \iff \left|\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha=1\\ \cos\phi=1\end{array}\right.\\ \text{ou}\\ \left\{\begin{array}{l}\cos\alpha=-1\\ \cos\phi=-1\ .\end{array}\right.\end{array}\right.$

3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

NOM :

4. Donner une solution $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2$ pour chacuns des systèmes suivants :

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot \cos\theta = -3 \\ \lambda \cdot \sin\theta = \sqrt{3} \end{array} \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot \cos\theta = 3 \\ \lambda \cdot \sin\theta = \sqrt{3} \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot \cos\theta = -2 \\ \lambda \cdot \sin\theta = -1 \end{array} \right.$

(d) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot \cos\theta = 1 \\ \lambda \cdot \sin\theta = -2 \end{array} \right.$

(e) $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \cdot \cos\theta = 0 \\ \lambda \cdot \sin\theta = -4 \end{array} \right.$

5. (a) Trouver deux réels A_0 et ϕ_0 tels que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 3\sin(\pi t) - 4\cos(\pi t) = A_0 \sin(\pi t - \phi_0)$.

(b) Résoudre l'équation d'inconnues réelles A et ϕ : $\forall t \in \mathbb{R},\ A\sin(\pi t - \phi) = A_0 \sin(\pi t - \phi_0)$.

NOM :

6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue t réelle :

   (a) $\sin(2t+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

   (b) $\tan^2(2t-1)=\frac{1}{3}$.

   (c) $\cos(3t)=\sin(t+\frac{\pi}{4})$.

   (d) $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{t}{3}\right)\equiv\frac{t}{3}\ \ [2\pi]$.

Problème

Soient a, b deux réels.

1. Soient g et h deux fonctions numériques (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$).

   On considère les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$(E_g) : f''+a\cdot f'+b\cdot f=g \qquad\qquad (E_h) : f''+a\cdot f'+b\cdot f=h\ .$$

(a) Quelles sont les équations homogènes associées à (E_g) et à (E_h) ?

(b) Soient λ, μ deux réels et soit f_g, respectivement f_h une fonction solution de (E_g), respectivement (E_h) sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $f = \lambda f_g + \mu f_h : t \mapsto \lambda f_g(t) + \mu f_h(t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_{\lambda g+\mu h}) : f'' + a \cdot f' + b \cdot f = \lambda g + \mu h$.

2. Soit l une fonction de la variable réelle et à valeurs complexes ($l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$).

   On considère l'équation différentielle : $(E_l) : f'' + a \cdot f' + b \cdot f = l$.

   Soient α et β deux réels. Prouver que si une fonction $f_l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une solution de (E_l) sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f : t \mapsto \alpha \cdot \Re(f_l(t)) + \beta \cdot \Im(f_l(t))$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + a \cdot f'(t) + b \cdot f(t) = \alpha \cdot \Re(l(t)) + \beta \cdot \Im(l(t))$

3. (a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, déterminer une solution $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $(D_n) : \forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2 \cdot f'(t) + 2 \cdot f(t) = e^{int}$

   (b) En déduire une solution numérique (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $(D) : \forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2 \cdot f'(t) + 2 \cdot f(t) = 1 + \cos(t) + \sin(t) + \frac{1}{4}\cos(3t) - \frac{2}{11}\sin(5t)$

(c) Donner une solution $f_{c_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle
$(C_1) : \forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2 \cdot f'(t) + 2 \cdot f(t) = te^{it}$.

(d) Donner une solution $f_{c_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle
$(C_2) : \forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2 \cdot f'(t) + 2 \cdot f(t) = te^{(1+i)t}$.

(e) Déduire des questions précédentes les solutions numériques de l'équation différentielle
$(C) : \forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2 \cdot f'(t) + 2 \cdot f(t) = [-2 + t(5 - 3e^t)]cos(t)$.