Devoir Surveillé d'Analyse $1^{ère}$ Année

Juin 2000

Suites Récurrentes
Etudes de Fonctions Numériques
Formules de Taylor

– Durée : 2 heures –

Notes Manuscrites Personnelles et Poly du Cours Autorisés

Machine à Calculer "Casio FX 92" Autorisée

NOM :
Prénom :
Groupe :

Bien lire TOUT l'énoncé

Répondre aux questions suivantes **sur cet énoncé**

Ce devoir consiste en un **Q.C.M.** d'une part et un **problème** d'autre part :

- **Q.C.M. :**

  Il peut y avoir une ou plusieurs réponses correctes à chacunes des questions. Chaque réponse est notée d'après son importance selon les critères suivants : connaissance du cours, raisonnement, calcul. Les bonnes réponses ajoutent des points, les ommitions restent neutres et les erreurs sont sanctionnées en fonction de leur gravité.

  Pour répondre aux questions, il suffit de **cocher les repères** des réponses proposées correspondant à votre choix. Au cas où aucunes des réponses proposées ne conviendrait **et uniquement dans ce cas sous peine de nullité**, il faut faut cocher le repère *autre* et uniquement celui ci, puis donner une proposition de réponse à partir de l'intitulé : "*autre réponse*".

- **Problème :**

  Une grande attention sera observée quant à la rédaction de l'**enchaînement logique**.

Ce sujet comporte 8 pages, celle ci comprise.

NOM :

Q.C.M.

1. La fonction : $x \mapsto \left| \begin{array}{ll} \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$, est ...

   (a) dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$

   (b) croissante sur $\mathbb{R}$

   (c) décroissante sur $\mathbb{R}$

   (d) constante sur $\mathbb{R}^*$

   Réponse(s) :

a	b	c	d	*autre*

   autre réponse :

2. La fonction : $x \mapsto \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\sin x}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$, est ...

   (a) décroissante sur $[0; \dfrac{\pi}{2}[$

   (b) décroissante sur $[0; 4,4]$

   (c) décroissante sur $[0; 4,5]$

   (d) décroissante sur $[0; \dfrac{3\pi}{2}[$

   Réponse(s) :

a	b	c	d	*autre*

   autre réponse :

3. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{d}{dx} \cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \ldots$

   (a) $-\dfrac{2}{x^3} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$

   (b) $-e^{-\frac{1}{x^2}} \cos\left(\dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$

   (c) $\dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$

   (d) $\dfrac{2\cos\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$

   Réponse(s) :

a	b	c	d	*autre*

   autre réponse :

4. La limite de : $\dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$ lorsque $x \to e$ ...

(a) n'est pas définie ou vaut : $\pm\infty$ (b) vaut : e (c) vaut : 1 (d) vaut : $\dfrac{1}{e}$

Réponse(s) :

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

5. La limite de : $\dfrac{\sin x \tan x - (\ln(1+x))^2}{(2x)^3}$ lorsque $x \to 0$ ...

(a) n'est pas définie ou vaut : $\pm\infty$ (b) vaut : $\dfrac{5}{48}$ (c) vaut : $\dfrac{7}{48}$ (d) vaut : $-\dfrac{7}{48}$

Réponse(s) :

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

6. La dérivée $5^{ème}$ en 0 de la fonction : $x \mapsto \tan x$ vaut :

(a) $\dfrac{4}{5}$ (b) $\dfrac{2}{3}$ (c) $\dfrac{2}{15}$ (d) 16

Réponse(s) :

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

7. La fonction réelle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $f'' - f' - 2f = 1_{\mathbb{R}}$, passant par $\frac{1}{2}$ en 0 et ayant un nombre dérivé en 0 égal à -1 est ...

(a) non définie car il y a une infinité de solutions

(b) $t \mapsto \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{-t}}{2} - \dfrac{e^{2t}}{2}$

(c) $t \mapsto -\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{2t}}{2}$

(d) $t \mapsto \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{-2t}}{2}$

Réponse(s) :

a	b	c	d	*autre*

autre réponse :

NOM :

Problème

Le but de ce problème est d'étudier une fonction $r : \left| \begin{array}{c} R_+ \to [0;1] \\ t \mapsto r(t) \end{array} \right.$, qui représente sous certaines hypothèses la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu d'une population donnée lorsqu'il a en moyenne t enfants à chaque génération. Il ne sera pas question d'étudier le modèle probabiliste permettant de prouver que la fonction r de ce problème correspond effectivement à la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu, mais d'en utiliser les résultats pour définir et étudier la fonction r.

Soit t un paramètre réel strictement positif,
soit (E_t) : $e^{t(x-1)} = x$, une équation d'inconnue $x \in [0;1]$,
soit f la fonction : $x \mapsto e^{t(x-1)}$,
soit (u_n) la suite définie par : $\left| \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in I\!N,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$.

1. **Définition implicite de $r(t)$ comme une des solutions de l'équation paramétrée (E_t).**

   (a) Déterminer le maximum sur $I\!R$ de la fonction : $u \mapsto ue^{-u}$.

   (b) Etudier sur le segment $[0;1]$ les variations de la fonction $F : x \mapsto e^{t(x-1)} - x$ (Donner les tableaux de variations correspondant aux cas : $t \leq 1,\ t > 1$).

(c) En déduire en fonction des valeurs du paramètre strictement positif t le nombre des racines de l'équation (E_t) dans $[0;1]$.

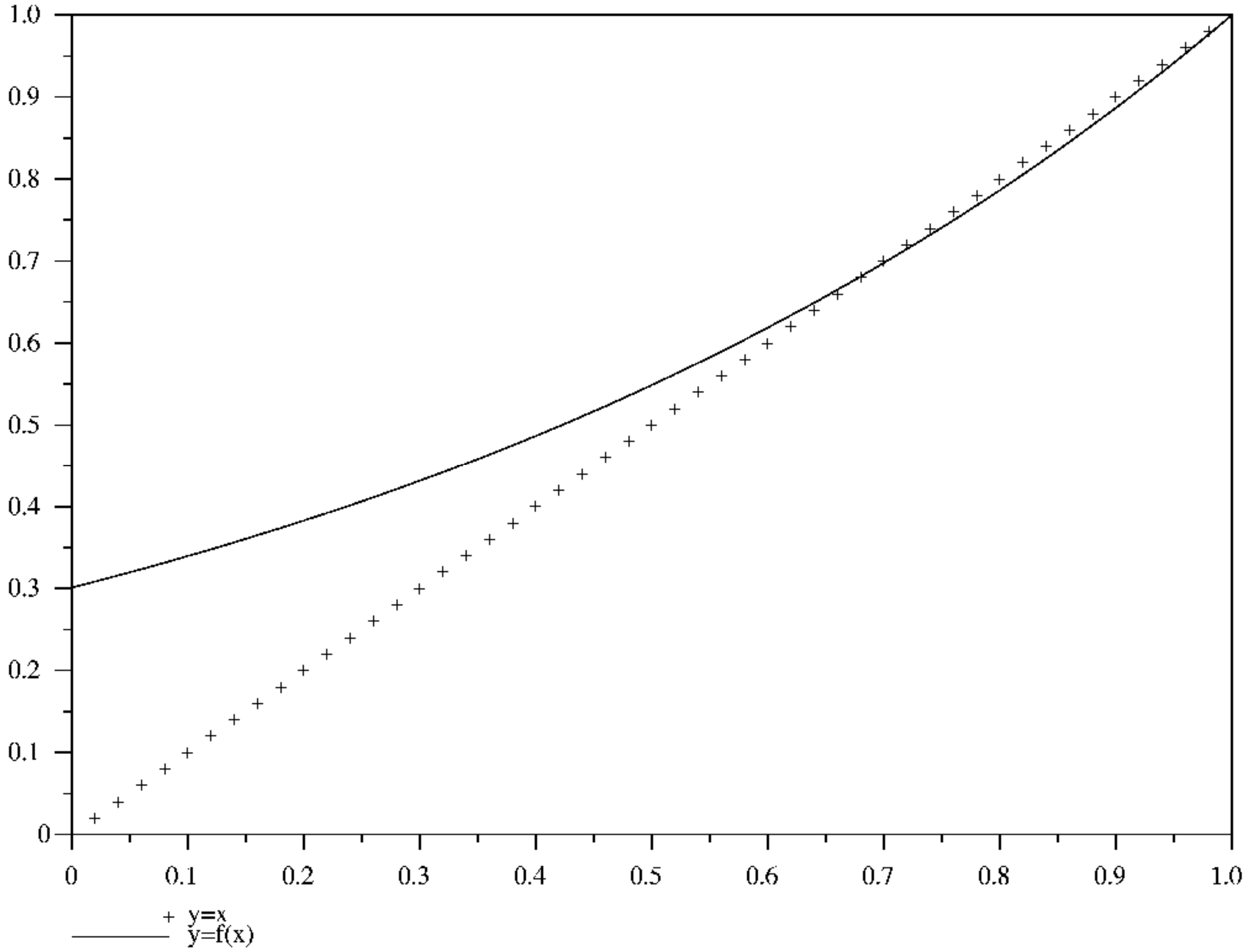
(d) On désigne par $r(t)$ la plus petite racine positive de (E_t). Cette désignation définit-elle bien une fonction $r : \mathbb{R}_+ \to [0;1]$? On admet que pour $t > 0$, $r(t)$ représente sous certaines hypothèses la probabilité d'extinction de la descendance d'un individu d'une population donnée lorsqu'il a en moyenne t enfants à chaque génération. Quel sens donner à la valeur de $r(t)$ lorsque $t \leq 1$?

2. **Etude de la suite** (u_n).

(a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et est majorée par $r(t)$

(b) En déduire sa convergence et sa limite. Que vaut-elle pour $t \leq 1$?

(c) Tracer graphiquement en laissant les lignes de construction les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 et $r(t)$ sur le graphique suivant et donner une valeur approchée à 10^{-2} près du t ayant servi pour faire ce graphique.



Représentation : $u_{n+1} = f(u_n)$ **, pour** $t \approx \qquad \pm 0,01$

(d) On suppose que $t > 1$. Soit $\alpha > 0$. Montrer que s'il existe un entier $n \in I\!N$ tel que : $F(u_n + \alpha) < 0$, alors : $u_n < r(t) < u_n + \alpha$.

(e) En déduire une valeur approchée à 10^{-5} près de $r(3)$ par le terme de (u_n) d'indice n_0 le plus faible possile (donner n_0 et une valeur approchée à 10^{-6} près de u_{n_0}).

3. **Etude de la fonction :** $t \mapsto r(t)$

On définit la fonction h : $\left| \begin{array}{lll}]0;1] & \to \mathbb{R} & \\ u & \mapsto \dfrac{\ln u}{u-1} & \text{si } 0 < u < 1 \\ 1 & \mapsto 1 & \end{array} \right.$

(a) Etudier le sens de variation de h et montrer que h réalise une bijection continue strictement monotone de $]0;1]$ vers $[1;+\infty[$.

(b) Montrer que h est dérivable en 1 et calculer le nombre dérivée de h en 1.

(c) Calculer $h \circ r$. En déduire que la fonction r est continue strictement monotone sur $[1;+\infty[$.

(d) Montrer que : $\forall t > 0,\ r(t) \cdot \ln(r(t)) = t \cdot r(t) \cdot (r(t) - 1)$. En déduire les limites de $t \cdot r(t)$ et de $e^t \cdot r(t)$ lorsque $t \to +\infty$

(e) Combien doit-il y avoir d'enfants en moyenne sur chaque génération pour être sûr de ne pas avoir extinction de sa descendance d'après ce modèle probabiliste? Et si l'on accepte un risque de 20%?

(f) Tracer sur un même graphique les graphes de h sur $]0;1]$ et de r sur $]0;+\infty[$ (c'est bien $\mathbb{R}_+^*$ et pas seulement $[1;+\infty[$).