Enib,2A

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
01 décembre 2000

Documents et calculatrices interdits.

EXERCICE 1 *Environ 20 minutes*

Donner un développement limité en 0, à l'ordre 10, de l'expression

$$f(x) \;=\; \ln(1-\tan x^2)$$

On partira d'un D.L. de $\tan u$ en 0 à l'ordre 5.

EXERCICE 2 *Environ 15 minutes*

Soient les deux fonctions
$f : x \in]0,+\infty[\longmapsto f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$
$g : x \in \mathbf{R} \longmapsto g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
Donner $\lim_{x\to 0} f(x)$ (preuve succinte). g est-elle continue en 0?
Décrire $g\circ f$. Cette fonction admet-elle une limite en 0?

EXERCICE 3 *Environ 45 minutes*

Calculer les intégrales suivantes :

$$1.\ \int_{\ln(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}^{0} \frac{dx}{e^{2x}+e^{x}+1} \qquad 2.\ \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x - 2\sin x}$$

$$3.\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}dx.$$

EXERCICE 4 *Environ 30 minutes*

On rappelle que l'ensemble des primitives d'une fonction f donnée est noté $\int f(x)dx$.
Déterminer

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx.$$

(On remarquera que $x^3+1 = x(x^2-4x+5)+4x^2-5x+1$...) En déduire que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$$

diverge. Donnez un argument qui permettait de le prévoir.

EXERCICE 5 *Environ 10 minutes*

Donner, suivant les valeurs du réel α, la nature de chacune des intégrales

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad J = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

On utilisera à cet effet une primitive et dans les cas de convergence on donnera les valeurs de ces intégrales.
Que pouvez-vous en déduire pour l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} ?$$