Enib,2A

Composition de mathématiques
21 décembre 2000

Durée : deux heures; sans documents.

Exercice 1

Déterminer, par calcul direct ou utilisation de critères, la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1.\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}dx \quad 2.\ \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right)dt$$

$$3.\ \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{x^t-1}dt, x \in \mathbb{R}^{+*} \quad 4.\ \int_0^1 \frac{\sqrt{u}}{e^{2u}}du.$$

(penser pour cette dernière intégrale aux intégrales de Bertrand.)

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

2. a. Soit $a \neq 0$, donner l'expression de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,y)$.

b. Expliciter $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$.

3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2(0,0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \frac{3y^5}{\sqrt{(x^6+y^6)(x^2+y^2)}} - y\sqrt{\frac{(x^6+y^6)}{x^2+y^2}}.$$

L'application g admet-elle une limite en 0? Dans l'affirmative donner cette limite, bien sûr.

4. L'application f est-elle différentiable en (0,0)? On donnera deux explications de la réponse donnée.

Exercice 3

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, telles que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $\varphi(x,y) = f(\frac{y}{x})$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) \ = \ e^x \cos 2x + x \sin x.$$

Exercice 5

On pose $F(u,v) = f(x,y)$ avec $u(x,y) = e^x + e^y$ et $v(x,y) = e^{-x} + e^{-y}$. Exprimer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

au moyen des dérivées partielles de F par rapport à u et v.