Enib,2A

Composition de mathématiques
01 février 2001

Durée : deux heures.

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1.\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}dx \quad 2.\ \int_2^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x},\quad x \in \mathbb{R}.$$

(on discutera bien sûr, pour cette deuxième intégrale, suivant les valeurs de x.)

$$3.\ \int_1^{+\infty} \sin(x+\frac{1}{x})dx.$$

Indication : Pour cette dernière intégrale, on intègrera par parties après avoir fait apparaître la dérivée de $x+\frac{1}{x}$ devant $\sin(x+\frac{1}{x})$, et on pensera à la convergence absolue!

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^p y^q}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ pour que f soit continue.

2. Déterminer les dérivées partielles du premier ordre de f (on donnera $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ **en tout point** (x,y).)

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ pour que f soit de classe C^1.

4. Est-ce une condition nécessaire et suffisante pour que f soit différentiable?

Exercice 3

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, telles que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $\varphi(x,y) = f(\frac{y}{x})$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2ay' + (1 + a^2)y = \sin x. \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Exercice 5

On pose $F(u,v) = f(x,y)$ avec $u(x,y) = e^x + e^y$ et $v(x,y) = e^{-x} + e^{-y}$. Exprimer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

au moyen des dérivées partielles de F par rapport à u et v.

FIN.