Enib, 2A **28.03.01**

Composition de mathématiques

Documents et calculatrices interdits.
Une attention particulière sera portée à la rigueur et à la concision des raisonnements et calculs, ainsi qu'à la présentation.

Exercice 1 /5

Etudier les extrema locaux de la fonction suivante :

$$\begin{cases} f : R^2 \to R \\ f(x,y) = (3x+4y)e^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

Exercice 2 /4

Soit $D' = \{(u,v) \in R^2, u \leq 1, -u \leq v \leq u\}$.

On considère l'application $\phi : R^2 \to R^2, (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$.

Déterminer $D = \phi(D')$ et calculer l'intégrale double

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dxdy.$$

Exercice 3 /4

Calculer le volume du « solide » compris entre le domaine D du plan réel défini par $x^2+y^2-y \leq 0,\quad x^2+y^2-x \leq 0$ et la surface d'équation $z = (x+y)^2$.

Exercice 4 /10

Soit C la courbe d'équation $f(x,y) = 0$, où $f(x,y) = x^3 - xy^2 - 5, \quad \forall (x,y) \in R^2$.

a) Montrer que la courbe C ne comporte aucun point critique, c'est à dire qu'elle admet en tout point (x_0, y_0) une tangente dont on précisera l'équation. Trouver l'unique point $A \in C$ où la tangente est parallèle à l'axe Oy.

b) Soit $g : R^2 \to R$ la fonction définie par $g(x,y) = x^2 + y^2$. Notons D le disque <u>fermé</u> de centre $(0,0)$ et de rayon OA. Montrer qu'il existe un point $U \in C \cap D$ tel que $g(U) \leq g(M)$ pour tout $M \in C$.
Indication : justifier d'abord le fait qu'il existe un point $U \in C \cap D$ tel que $g(U) \leq g(M)$ pour tout $M \in C \cap D$ puis raisonner par l'absurde.

c) Soit (x_0, y_0) un point de C différent de A.

   i) Montrer qu'il existe un nombre $r > 0$ et une fonction $\varphi :]x_0 - r, x_0 + r[\to R$ de classe C^1 telle que, dans une boule ouverte convenable de centre (x_0, y_0), la courbe C a pour équation $y = \varphi(x)$.

   ii) Montrer que si la fonction G telle que $G(x) = g(x, \varphi(x))$ a un extremum local en x_0, alors les vecteurs $u(x_0, y_0)$ et $Grad_f(x_0, y_0)$ sont colinéaires. Trouver les points (x_0, y_0) vérifiant cette condition. On posera à cet effet $a = -\sqrt[3]{5/4}$.

d) Montrer que l'on a $U = A$ et calculer la distance minimale de l'origine à un point de C.