Mathématiques

Contrôle 4

- Durée : 1 heure 30.
- Documents non autorisés.
- Les trois exercices sont *indépendants* les uns des autres.
- Les réponses sont à reporter sur l'énoncé lui–même, dans les cadres prévus à cet effet.
- Noter **Nom**, **Prénom** et **Groupe** sur chaque feuille de l'énoncé.
- Ce sujet comporte 6 pages numérotées.

Nom/Prénom/Groupe :

1 Exercice 1 ≈ 30'

7

Dans un repère orthonormé (xOy) on considère les points $A(1,0)$ et $B(2,3)$.
On appelle Γ_1^+ l'arc de parabole d'axe de symétrie (Oy) reliant A à B (orienté donc de A vers B !), et Γ_2^+ le segment $[BA]$ (orienté donc de B vers A !)

1. Paramétrer Γ_1^+.

1

$x = t$
$y = t^2 - 1$ $\quad t \in [1, 2]$

2. Paramétrer Γ_2^+.

1

$x = t$
$y = 3t - 3$ $\quad t \in [2, 1]$

3. On appelle Γ^+ la réunion de Γ_1^+ et Γ_2^+, et on considère la forme différentielle

$$\omega = (x+y)dx + (y-x)dy$$

Calculer directement l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma^+} \omega$.

2

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \int_1^2 (t^2+t-1)\,dt + (t^2-t-1)\,2t\,dt + \int_2^1 (4t-3)dt + (2t-3)3dt$$

$$= \int_1^2 (2t^3 - t^2 - t - 1)\,dt + \int_2^1 (10t - 12)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t\right]_1^2 + \left[-5t^2 + 12t\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{11}{2}t^2 + 11t\right]_1^2 = -\frac{1}{3}$$

4. Retrouver le résultat précédent par la formule de Green-Riemann.

$$I = \int_1^2 \int_{x^2-1}^{3x-3} -2\, dx\, dy = -2 \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\, dx$$

$$= -2 \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = -2\left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{6}\right) = -1/3$$

2

5. Le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j}$ est-il un champ de gradients ?

Non. la courbe Γ est fermée et la circulation de $\vec{V}$ le long de Γ est non nulle.

1

Nom/Prénom/Groupe :

2 Exercice 2 $\approx 30'$

1. Déterminer toutes les valeurs de θ telles que $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$.

1

$\sin 2\theta = \frac{1}{2} \iff 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ou $2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\iff \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

2. En utilisant les coordonnées polaires et la question qui précède, déterminer les points d'intersection de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $xy = 1$ et du cercle C de centre O et de rayon 2. *On donnera ces points en coordonnées polaires.*

2

$xy = 1$ et $x^2 + y^2 = 4 \iff \rho^2 \sin\theta\cos\theta = 1$ et $\rho^2 = 4$

$\iff \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$, $\rho = 2$

$\iff \sin 2\theta = \frac{1}{2}$

les points cherchés sont $A\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$ $B\left(\frac{5\pi}{12}, 2\right)$

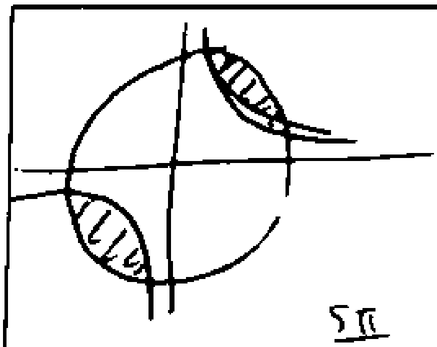
$A'\left(\frac{13\pi}{12}, 2\right)$ $B'\left(\frac{17\pi}{12}, 2\right)$

3. Calculer $f'(\theta)$, où $f(\theta) = \ln(\tan\theta)$, l'angle θ étant supposé tel que $\tan\theta > 0$. On exprimera le résultat en fonction de $\sin 2\theta$.

1

$f'(\theta) = \frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$

4. Calculer l'aire du domaine fermé délimité par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$. On utilisera bien sûr les coordonnées polaires !



$$\text{Aire} = 2 \times \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(\int_{(\sin\theta\cos\theta)^{-1/2}}^{2} \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= 2 \times \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(2 - \frac{1}{2\sin\theta\cos\theta} \right) d\theta$$

$$= 2 \times \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(2 - \frac{1}{\sin 2\theta} \right) d\theta$$

3

$$= 2 \cdot \left[2\theta - \frac{1}{2} \ln(\tan\theta) \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}$$

$$= 2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\tan\frac{5\pi}{12}}{\tan\frac{\pi}{12}} \right) \right)$$

Nom/Prénom/Groupe :

6

3 Exercice 3 : fenêtre de Viviani $\approx 30'$

1. Soit $\mathcal{D}$ un domaine fermé de R^2 et $\mathcal{S}$ une surface de R^3 définie par $\mathcal{S}= \{(x,y) \in\mathcal{D},\ z = g(x,y)\}$ où g est de classe C^1. Rappeler la formule donnant l'aire de $\mathcal{S}$.

$$\text{Aire}(S) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

1

2. Précisément on considère ici la surface $\mathcal{S}$ définie comme intersection de la sphère (creuse) de centre O et de rayon R et du cylindre (plein!) défini par $x^2 - Rx + y^2 \leq 0,\ z \geq 0$. ($\mathcal{S}$ est appelée fenêtre de Viviani). Quel est ici le domaine $\mathcal{D}$? Quelle est la fonction g ?

D est la base du cylindre, i.e. le disque $\left| \begin{array}{l} x^2-Rx+y^2\leq 0 \\ z=0 \end{array}\right.$

cette équation s'écrit aussi $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{R^2}{4}$.

la fonction g est $g(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

1

3. Calculer l'aire de $\mathcal{S}$. A cet effet on conseille de décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires (non "décentrées"), puis de transformer en coordonnées polaires la formule donnée à la première question du présent exercice.

$\mathcal{D}$: $\rho^2 - R\rho\cos\theta \leq 0 \iff \rho \leq R\cos\theta$

1 et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

on a $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

1 ce qui donne

jacobien

$$\text{Aire}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta} \frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho\,d\theta$$

2

$$= -R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^{R\cos\theta} d\theta = -R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(R\sqrt{1-\cos^2\theta} - R\right)d\theta$$

$$= +R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin\theta)\,d\theta + R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,d\theta = R^2\left[\theta-\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + R^2\left[\theta+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= R^2(\pi-2)$$