**COMMERCEZ PAR
LIRE L'ÉNONCÉ
ENTIÈREMENT
ET
ATTENTIVEMENT.**

— Durée : 2 heures.

— DOCUMENTS NON-AUTORISÉS, À L'EXCEPTION DE L'AIDE-MÉMOIRE FOURNI AVEC LE SUJET.

— Les trois parties sont *indépendantes.*

— Les réponses sont à reporter sur le document distribué avec le sujet.

— Noter le **NOM**, le **PRÉNOM**, le **GROUPE**, indiqué par 1 lettre : A, B, C ou D.

— Le sujet comporte 4 pages numérotées auquel s'ajoute l'aide-mémoire (1 page).

— Le document réponses comporte 5 pages numérotées.

---

1 Question de cours : vitesse et accélération en coordonnées sphériques

… comme promis, mais en plus simple*.

Y'a pas de quoi !

Un point mobile M se déplace sur une sphère de rayon R. Sa position est définie par les angles $\varphi(t)$ et $\theta(t)$. Nous distinguons 3 référentiels :

— $R_0\left(O,\vec{i_0},\vec{j_0},\vec{k_0}\right)$: repère d'observation ; la position, la vitesse, l'accélération du point M sont relatives à ce référentiel,

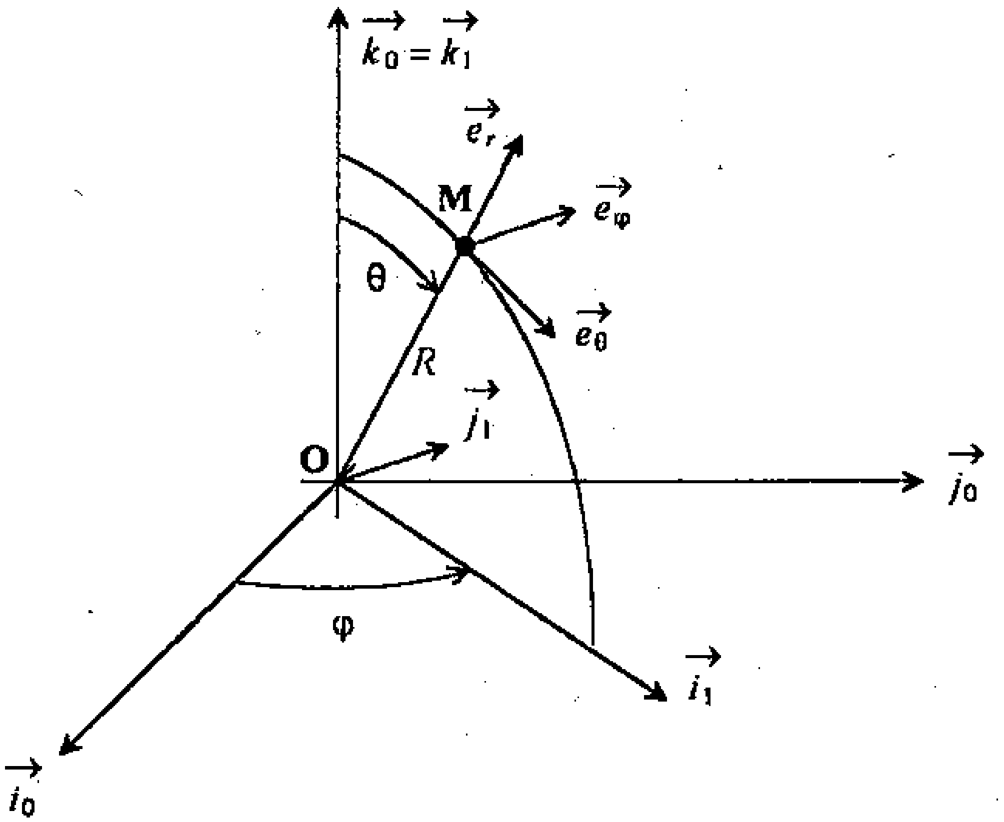
— $R_1\left(O,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_1}=\vec{k_0}\right)$: obtenu par rotation de R_0 d'un angle φ autour de $\vec{k_0}$,

— $R_2\left(O,\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi},\vec{e_r}\right)$, avec $\vec{e_\varphi}=\vec{j_1}$, obtenu par rotation de R_1 d'un angle θ autour de $\vec{e_\varphi}$.

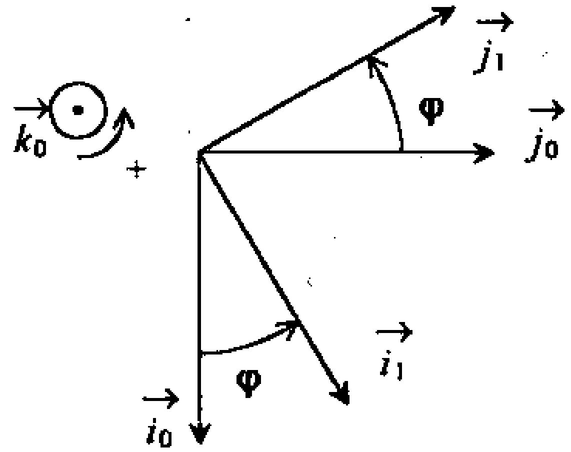
Noter l'ordre ! $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_\varphi}$ et $\vec{e_r}$, que nous pourrions appeler $\vec{i_2}, \vec{j_2}$, et $\vec{k_2}$ (mais nous ne le ferons pas !).

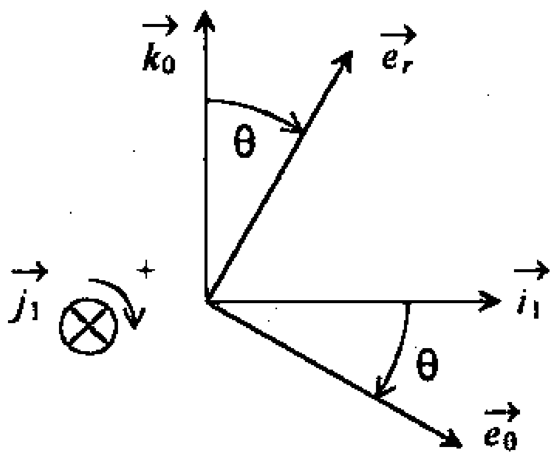
* Nous considérons le cas défini par $\varphi(t)=\omega_0 t$ et $\theta(t)=\omega_0 t$, avec $\omega_0 = C^{ste}$.

Rappel : le point mobile M se déplace sur une sphère de rayon R.



$$R_0\left(O,\vec{i_0},\vec{j_0},\vec{k_0}\right)\to\boxed{\begin{array}{c}\textit{Rotation}\\ \left(\varphi,\vec{k_0}\right)\end{array}}\to R_1\left(O,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_1}=\vec{k_0}\right)\to\boxed{\begin{array}{c}\textit{Rotation}\\ \left(\theta,\vec{j_1}\right)\end{array}}\to R_2\left(O,\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}=\vec{j_1},\vec{e_r}\right)$$





Le repère d'écriture choisi est R_2.

☐ **1** - Calculez les vecteurs

a) $\dfrac{d\vec{e_\varphi}}{dt}$ b) $\dfrac{d\vec{e_r}}{dt}$ c) $\dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt}$

☐ **2** - Calculez le vecteur vitesse du point M en fonction de R, ω_0, θ.

☐ **3** - Calculez le vecteur accélération du point M en fonction de R, ω_0, θ.

☐ **4** - Vérifiez que le point M reste en fait sur une demi-sphère.

2 Courbes gauches

Dans le plan $(O, \vec{i_0}, \vec{j_0})$, le mouvement d'un point M est défini par : $\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = B\sin(\omega t) \end{array} \right.$.

Les paramètres A, B et ω sont des constantes strictement positives.

☐ **1** - Définissez la trajectoire. Précisez le sens de parcours.

☐ **2** - Calculez $\overrightarrow{v(M)}$, vecteur vitesse du point M. En déduire l'expression du vecteur unitaire tangent à la trajectoire : $\vec{t}$.

☐ **3** - Constatant que le mouvement est plan, donnez très rapidement l'expression du vecteur unitaire normal à la trajectoire : $\vec{n}$.

☐ **4** - Calculez $\overrightarrow{a(M)}$, vecteur accélération du point M.

☐ **5** - Déduisez-en l'expression du rayon de courbure R.

☐ **6** - Représentez la trajectoire et reportez sur celle-ci les informations suivantes :

— position du point M, $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\overrightarrow{v(M)}$, $\overrightarrow{a(M)}$,

— indication du rayon de courbure R,

pour les valeurs de (ωt) égales à $[0, \pi/4, \pi/2, \pi]$.

Le soin que vous apporterez à cette sixième question sera apprécié (... noté !).

$A = 40$ mm. $B = 20$ mm. $\omega = 50\pi$ rad/s

3 Expérience de pensée de Galiléo-Galilei : la couleuvrine

« ... Supposons de même qu'on ait disposé une couleuvrine* au sommet d'une tour et que l'on tire avec elle des tirs de "pointe en blanc", c'est-à-dire parallèlement à l'horizon ; quelle que soit la charge de la couleuvrine, et donc que le boulet tombe à mille, quatre mille, six mille ou dix mille brasses**, tous ces tirs se feront en des temps égaux entre eux, chacun étant égal au temps qu'il faudrait au boulet pour aller de la gueule de la couleuvrine jusqu'à terre lorsqu'on le laisse tomber à la perpendiculaire, sans aucune impulsion... ».

Extrait du « *Dialogue sur les deux plus grands systèmes du monde* » Galiléo-Galiléi (1632)

* couleuvrine : ancien canon dont le tube est long et effilé.

** brasse : ancienne mesure de longueur correspondant à 1,6 m environ.

Hypothèse : le boulet (noté M), dès lors qu'il quitte le fût du canon (à l'instant initial $t_0 = 0$) et jusqu'à son point d'impact au sol (à l'instant t_1), est animé d'un mouvement à accélération constante :

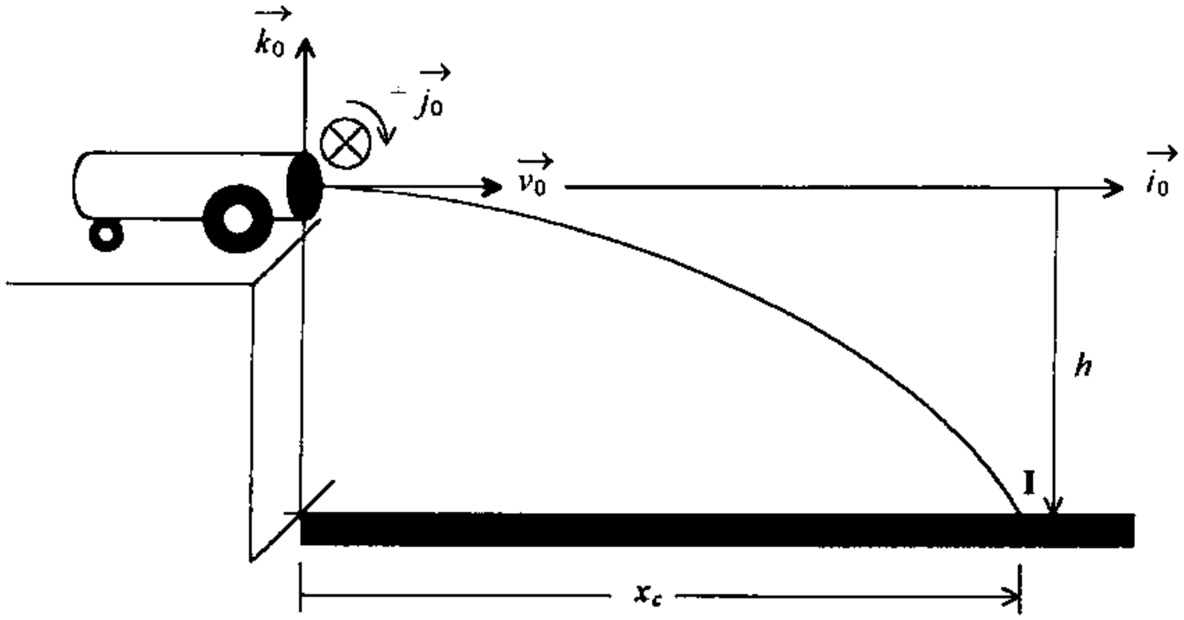
$$\overrightarrow{a(M)} = -g\,\vec{k_0}$$

NOTE : la constante g correspond à « l'accélération de la pesanteur ».

Analyse de texte : « parallèlement à l'horizon » signifie que la vitesse est, à l'instant initial, horizontale.

$$\left.\overrightarrow{v(M)}\right|_{t_0} = v_0\,\overrightarrow{i_0}\text{, noté } \overrightarrow{v_0}.$$

« sans aucune impulsion » signifie alors que $v_0 = 0$.



☐ **1** - Par intégration de l'accélération, démontrez que la trajectoire est une parabole.

☐ **2** - Vérifiez que le temps de chute ne dépend pas de la vitesse initiale v_0.

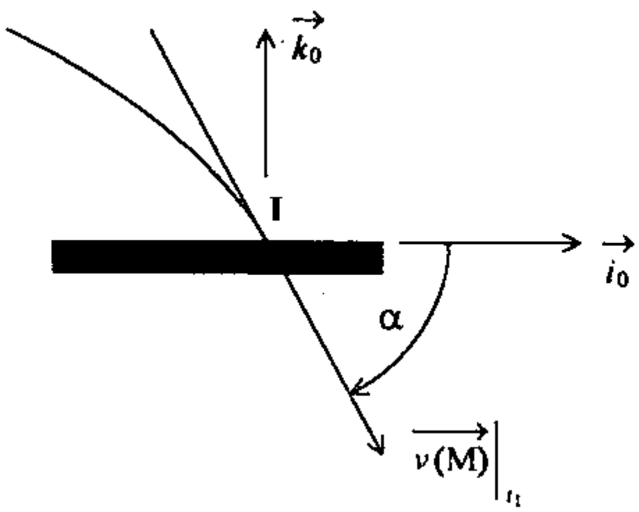
☐ **3** - Exprimez la distance x_c en fonction de

— la hauteur de chute h,

— la vitesse initiale v_0,

— l'accélération g.

☐ **4** - Déterminez l'incidence du tir au point d'impact, c'est-à-dire l'angle α représenté ci-dessous.



☐ **5** - Applications numériques :
calculer x_c et α pour $g = 9,8$ m/s^2, $v_0 = 20$ m/s, $h = 50$ m,

Barème indicatif

1 Question de cours *6 points*

☐ **1** - Il s'agit des dérivées dans R_0 ! Soit $\dfrac{d^{(0)}\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$, etc.

☐ **2** - Il s'agit de $\overrightarrow{v(\mathrm{M})}_{/0} = \dfrac{d^{(0)}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}$ … ☐ **3** - … et de $\overrightarrow{a(\mathrm{M})}_{/0} = \dfrac{d^{(0)}\overrightarrow{v(\mathrm{M})}_{/0}}{dt}$.

2 Courbes gauches *9 points*

☐ **6 - Répondre à la question sur le présent document.**

(rad)	mm	(–)	(–)	m/s	m/s²
ωt	$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$	$\vec{t}$	$\vec{n}$	$\overrightarrow{v(\mathrm{M})}$	$\overrightarrow{a(\mathrm{M})}$
0					
π/2					
π					
π/4					

3 La couleuvrine *5 points*

E.N.I.B $2^{\text{ème}}$ année. 2000-2001.

Aide Mémoire de Mécanique. DS 1.

1 *Dérivées... et cætera*

$\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} = \vec{e} \wedge \vec{u}$, pour une rotation α portée par $\vec{e}$.

Formule de dérivation composée

$$\boxed{\frac{d^{(i)}\vec{f}}{dt} = \frac{d^{(j)}\vec{f}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \vec{f}}$$

Relation vraie

— pour toute fonction vectorielle $\vec{f}$

— quelques soient les référentiels R_i et R_j.

2 *Courbes gauches*

Trièdre de Frenet : $\vec{t} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{ds}$ $\qquad \dfrac{\vec{n}}{R} = \dfrac{d\vec{t}}{ds}$ $\qquad \vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{b}$

$$ds = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

3 *Cinématique du point*

$$\overrightarrow{v(\mathrm{M})} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} \qquad \overrightarrow{a(\mathrm{M})} = \frac{d\overrightarrow{v(\mathrm{M})}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v(\mathrm{M})} = v\,\vec{t} \qquad \overrightarrow{a(\mathrm{M})} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

$$= \dot{s}\,\vec{t} \qquad = \ddot{s}\,\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}$$

Au besoin, on adopte une notation plus précise :

$\overrightarrow{v(\mathrm{M})_{/0}}$ = *vecteur vitesse du point* M *dans le mouvement de ce point par rapport au référentiel* R_0.