CECI N'EST PAS UN CORRIGÉ !
CE NE SONT QUE LES RESULTATS

E.N.I.B 2$^{\text{ème}}$ année. 2000-2001. Mécanique. Contrôle 1.

1 *Question de cours : vitesse et accélération en coordonnées sphériques*

Le repère d'écriture choisi est R_2.

☐ 1 -

Dans R_2 $(\vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_r})$ (Accepté dans $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$!)

$$\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = \left| \begin{matrix} -\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ 0 \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{matrix} \right. \qquad \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \left| \begin{matrix} \omega_0 \\ \omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \left| \begin{matrix} 0 \\ \omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \end{matrix} \right.$$

☐ 2 - Vecteur vitesse du point M en fonction de R, ω_0, θ.

$$\underset{R_2}{\overrightarrow{v(M)}} = \begin{bmatrix} R\omega_0 \\ R\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

☐ 3 - Vecteur accélération du point M en fonction de R, ω_0, θ.

$$\overrightarrow{a(M)} = \begin{bmatrix} -R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \\ 2R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \\ -R\omega_0^2 (1 + \sin(\omega_0 t)) \end{bmatrix}$$

☐ 4 - Le point M reste sur une demi-sphère.

$$\underset{R_0}{\overrightarrow{OM}} \left| \begin{matrix} \frac{R}{2} \sin(2\omega_0 t) \\ R \sin^2(\omega_0 t) \text{ — toujours } \geq 0 ! \\ R \cos(\omega_0 t) \end{matrix} \right.$$

2 *Courbes gauches*

☐ 1 - Trajectoire, sens de parcours.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$ ELLIPSE
(Et non élipse, élypse, hélypse

☐ 2 - $\overrightarrow{v(M)}$: vecteur vitesse du point M.

$$\overrightarrow{v(M)} = \left| \begin{matrix} -A\omega \sin(\omega t) \\ B\omega \cos(\omega t) \end{matrix} \right.$$

Expression du vecteur tangent : $\vec{t}$.
$$\vec{t} = \frac{1}{\left[A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)\right]^{1/2}} \begin{bmatrix} -A \sin(\omega t) \\ B \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

☐ **3** - Expression du vecteur normal : $\vec{n}$.
$$\vec{n} = \frac{1}{\left[A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)\right]^{1/2}} \begin{bmatrix} -B \cos(\omega t) \\ -A \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \vec{t}$$

☐ **4** - $\overrightarrow{a(M)}$: vecteur accélération du point M.
$$\overrightarrow{a(M)} = \begin{vmatrix} -A\omega^2 \cos(\omega t) \\ -B\omega^2 \sin(\omega t) \end{vmatrix} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$$

☐ **5** - Expression du rayon de courbure R.
$$R = \frac{\left[A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t)\right]^{3/2}}{AB}$$

(rad)	mm	(–)	(–)	m/s	m/s²
ωt	$\overrightarrow{OM}$	$\vec{t}$	$\vec{n}$	$\overrightarrow{v(M)}$	$\overrightarrow{a(M)}$
0	$\begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \pi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -100\pi^2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\pi/2$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -50\pi^2 \end{bmatrix}$
π	$\begin{bmatrix} -40 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\pi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 100\pi^2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\pi/4$	$\begin{bmatrix} 28{,}3 \\ 14{,}1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{3\pi}{\sqrt{5}} \\ \frac{1{,}5\pi}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -70{,}75\pi^2 \\ -35{,}25\pi^2 \end{bmatrix}$

$A = 40$ mm $B = 20$ mm $\omega = 50\pi$ rad/s ..

3 *Expérience de pensée de Galiléo-Galilei : la couleuvrine*

☐ 1 - Trajectoire parabolique.

$$\overrightarrow{a(M)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{v(M)} \begin{vmatrix} v_0 \\ 0 \\ -gt \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} v_0 t & = x_M \\ 0 & \\ -\frac{1}{2}gt^2 & = z_M \end{vmatrix}$$

$$z_M = -\frac{1}{2} g \frac{1}{v_0^2} \cdot x_M^2$$: éq. d'une parabole.

Note : $z = -\frac{1}{2}gt^2$ n'est pas l'équation d'une parabole !!!

☐ 2 - Temps de chute indépendant de v_0.

chute : $z_M = -h$; $-\frac{1}{2}gt_c^2 = -h$ $\quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

☐ 3 - Distance x_c.

$$x_c = v_0 t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

☐ 4 - Incidence du tir au point d'impact ... à l'instant t_c

$$\overrightarrow{v(M)} \begin{vmatrix} v_0 \\ 0 \\ -gt \end{vmatrix} ; \quad \overrightarrow{v(M)}_{t_c} = \begin{vmatrix} v_0 \\ 0 \\ -gt_c = -\sqrt{2gh} \end{vmatrix} ; \quad \tan\alpha = -\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$$

☐ 5 - Applications numériques $\quad x_c \simeq 64\ m \qquad \alpha \simeq -57°$