ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE BREST

E.N.I.B 2ème année. 2000-2001.

Mécanique. Contrôle 3.

COMMENCEZ PAR LIRE L'ÉNONCÉ ENTIÈREMENT ET ATTENTIVEMENT.

- Durée : 2 heures.
- DOCUMENTS NON-AUTORISÉS, À L'EXCEPTION DE L'AIDE-MÉMOIRE FOURNI AVEC LE SUJET.
- Les trois parties sont *indépendantes*.
- Les réponses **doivent être justifiées** et sont à reporter sur le document réponse avec le sujet.
- Noter le **NOM**, le **PRÉNOM**, le **GROUPE**, indiqué par 1 lettre : A, B, C ou D.
- Le sujet comporte 5 pages numérotées auxquelles s'ajoute l'aide-mémoire (1 page).
- Le document réponses comporte 5 pages numérotées.

---

1 Questions de cours

☐ **1** - M est un point animé d'un mouvement uniforme (vitesse v constante). L'accélération de ce point est-elle nulle ? Justifier votre réponse.

☐ **2** - J'ai dit, en cours :

$$\text{"}\alpha = 0 \text{ ne signifie pas que } \frac{d\alpha}{dt} \text{ soit nul !"}$$

Pouvez-vous rappeler la raison invoquée ?

☐ **3 - 1** - Soit un point M mobile simultanément dans R_1 et dans R_0. Le référentiel R_1 est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R_0. Justifier l'égalité :

$$\overrightarrow{a(\mathrm{M})}_{\mathrm{M}/0} = \overrightarrow{a(\mathrm{M})}_{\mathrm{M}/1}$$

3 - 2 - Est-encore vrai dans le cas d'un mouvement de translation circulaire uniforme ?

3 - 3 - Pouvons-nous affirmer également (si oui, justifier) que :

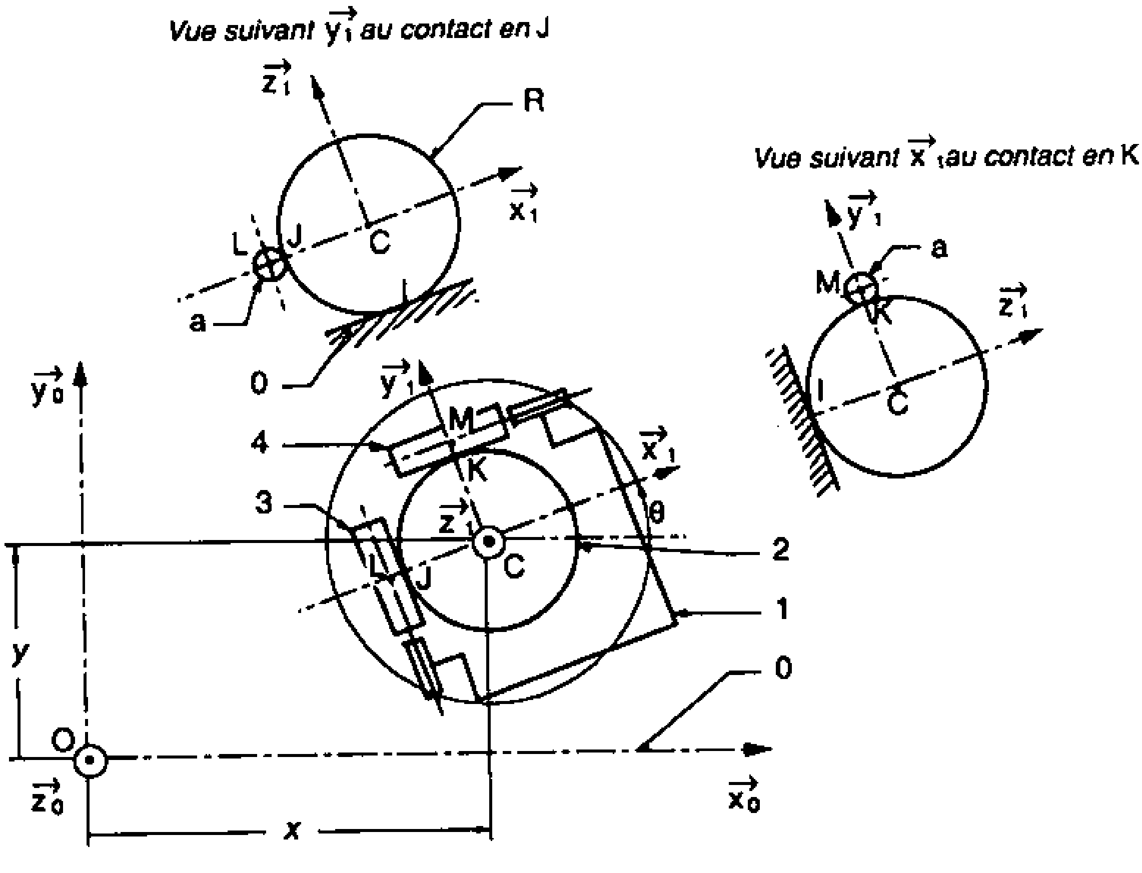
$$\overrightarrow{a(\mathrm{M})}_{2/0} = \overrightarrow{a(\mathrm{M})}_{2/1}, \text{ quelque soit } R_2 \text{ !}$$

2 SOURIS *de micro-ordinateur*

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un micro-ordinateur (*fig. 4.15*) :

- le plan de travail est indicé (0), il lui est lié le repère $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$;
- le cadre lié à la souris porte le numéro (1), il lui est lié le repère : $R_1(C;\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$;
- en fonctionnement normal, la bille (2) de rayon R, roule sans glisser en I, sur le plan lié à (0) ;
- le galet (3), de rayon a, fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $L\vec{y}_1$ avec le cadre (1) ;
- le galet (4), de rayon a, fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $M\vec{x}_1$ avec le cadre (1).

Les galets commandent des potentiomètres. En fonctionnement normal, ils roulent sans glisser, respectivement en J et K sur la bille (2).



On note $\vec{\Omega}(3/1) = \omega_{31}\vec{y}_1$ le vecteur instantané de rotation de (3) par rapport à (1) et $\vec{\Omega}(4/1) = \omega_{41}\vec{x}_1$ le vecteur instantané de rotation de (4) par rapport à (1).

Le solide (1) est animé d'un mouvement plan par rapport au solide (0). La condition de contact en C impose $\overrightarrow{OC}\cdot\vec{z}_0 = R$.

La position de (1) par rapport à (0) est définie par :

$$\overrightarrow{OC} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + R\vec{z}_0$$

$$\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1) \text{ avec } \vec{z}_0 = \vec{z}_1$$

Le torseur cinématique associé au mouvement de la bille (2) par rapport au cadre (1) est défini par :

$$\{\mathcal{V}(2/1)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) = p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + r\vec{z}_0 \\ \vec{V}(C\in 2/1) = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour l'instant les composantes p, q et r du vecteur instantané de rotation sont inconnues. On se donne le mouvement du cadre (1) par rapport au plan (0). À savoir :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(C\in 1/0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 \end{Bmatrix}$$

☐ **1** - Expliciter la condition de roulement sans glissement en I : $\overrightarrow{v(I)_{2/0}} = \vec{0}$

En déduire, dans R_0, le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{2/1}$ en fonction de R, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et r qui reste indéterminé pour l'instant.

☐ **2** - Expliciter la condition de roulement sans glissement en J : $\overrightarrow{v(J)_{3/2}} = \vec{0}$

En déduire, dans R_1, le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{3/1}$ en fonction de a, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et θ.

Donner la forme simplifiée, dans R_0, du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{2/1}$.

☐ **3** - Expliciter la condition de roulement sans glissement en K : $\overrightarrow{v(K)_{4/2}} = \vec{0}$

En déduire, dans R_1, le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{4/1}$ en fonction de R, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et θ.

☐ **4** - En quoi la fréquence de rotation des potentiomètres est-elle indépendante de la fréquence de rotation de la souris autour de l'axe perpendiculaire au plan ?

3 SOURIS

Tu verras comme c'est amusant !

Dimanche 04 janvier 2001. Promenade annuelle à la foire au manège de Penfeld, à la recherche de sujets originaux.

Et voilà ! Celui-ci s'appelle "***Vertiges***".

Ce manège comprend, en simplifiant, un mât vertical fixe (0) sur lequel sont articulés 4 bras (1). La liaison L_{01} est une liaison pivot d'axe vertical passant par le point A. A l'extrémité de chacun de ces bras est articulé un... bras (2). La liaison L_{12} est une liaison pivot d'axe horizontal passant par le point B. Autour de ce bras (2) est articulée une nacelle (3). La liaison L_{23} est une liaison pivot d'axe BC. Au total, le manège est équipé de 4 nacelles de 12 places chacunes. Un des joyeux personnages (M) fait mumux .

Les points B et C se situent dans le plan $(A, \vec{k}_1, \vec{i}_1)$.

La position de (3) dans (0) est définie par les angles $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ mesurés autour des axes $(A, \vec{k}_0 = \vec{k}_1)$, $(B, \vec{j}_1 = \vec{j}_2)$ et $(C, \vec{i}_2 = \vec{i}_3)$ respectivement.

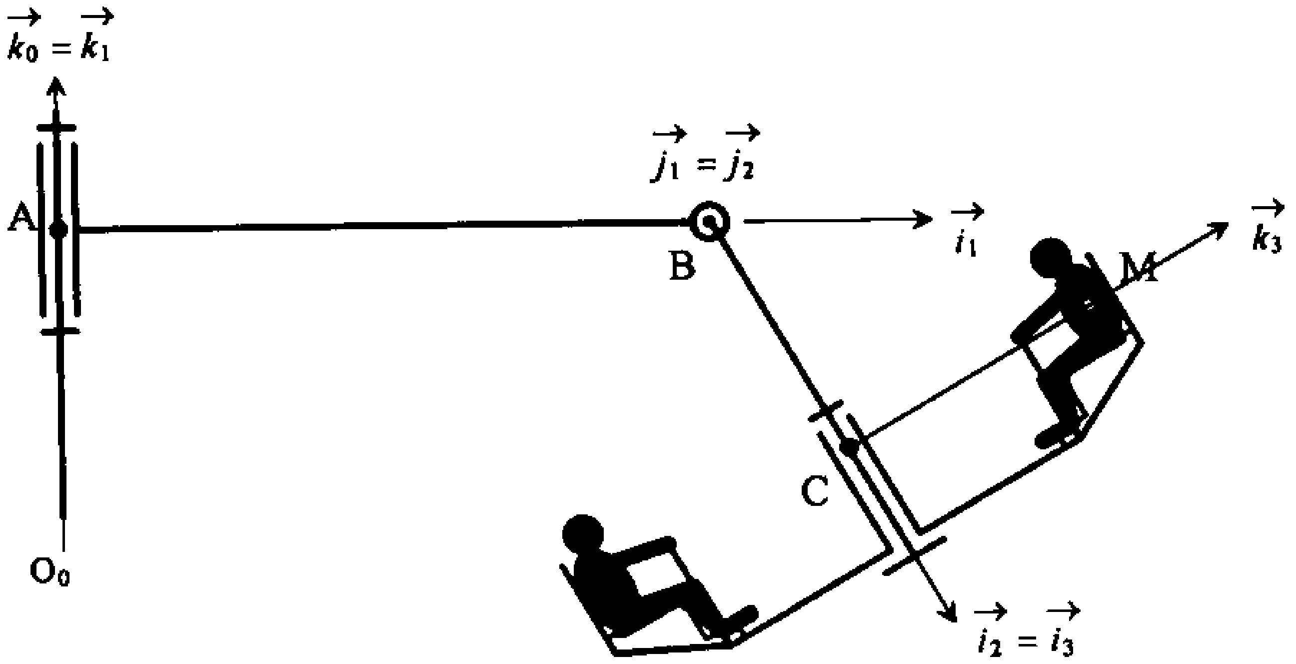
Nous distinguons 4 référentiels :

— $R_0\left(O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$: repère lié à la Terre (0). On pose $\overrightarrow{O_0A} = H_0\,\vec{k}_0$.

— $R_1\left(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\right)$: repère lié au bras (1). On pose $\overrightarrow{AB} = L_1\,\vec{i}_1$.

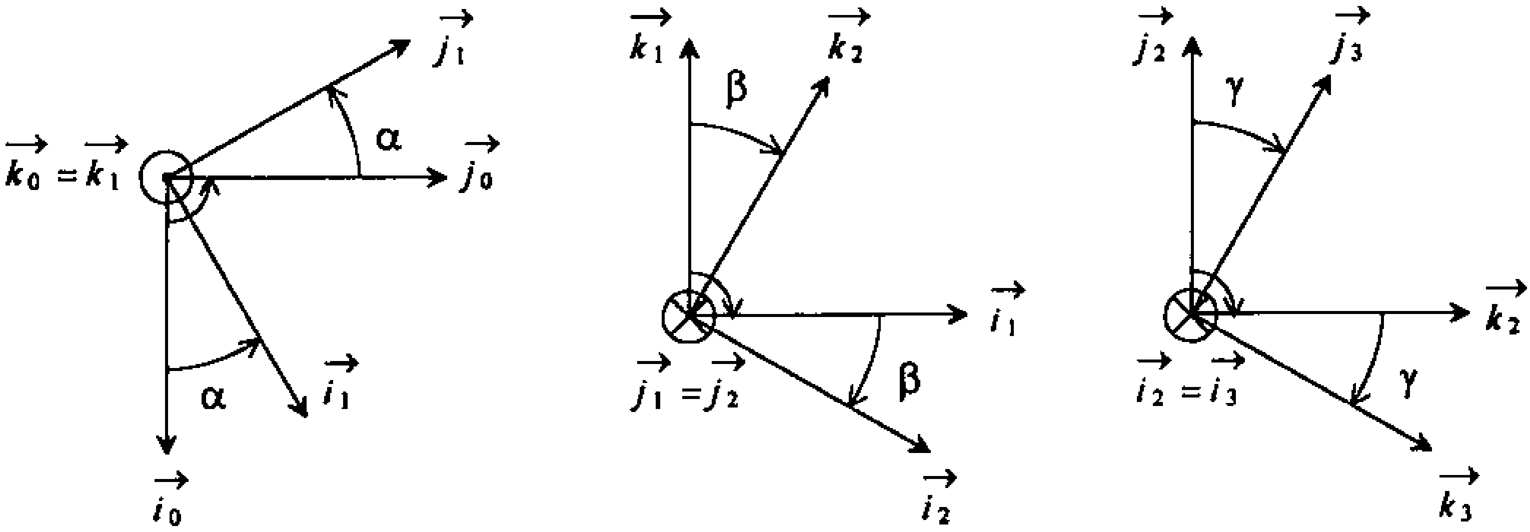
— $R_2\left(B, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2\right)$: repère lié au bras (2). On pose $\overrightarrow{BC} = L_2\,\vec{i}_2$.

— $R_3\left(C, \vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3\right)$: repère lié à la nacelle (3). On pose $\overrightarrow{CM} = R_3\,\vec{k}_3$



ATTENTION ! Dans cette représentation graphique, la direction $\vec{k}_3$ est volontairement placée dans le plan $(B, \vec{k}_2, \vec{i}_2)$.

Figures de travail :



Hypothèse importante : nous supposons que l'angle $\beta(t)$ varie lentement, et même très lentement. Aussi pourrons-nous considérer que $\beta(t) = \beta^* = C^{ste}$.

Calculer, en justifiant la démarche, successivement les vecteurs vitesse :

☐ **1** - $\overrightarrow{v(B)}_{1/0}$.

☐ **2** - $\overrightarrow{v(C)}_{2/0}$.

☐ **3** - $\overrightarrow{v(M)}_{2/0}$.

☐ **4** - $\overrightarrow{v(M)}_{3/0}$.

☐ **5** - Vérifier la loi de composition des vitesses sur l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{v(M)}_{3/0} = \overrightarrow{v(M)}_{3/2} + \overrightarrow{v(M)}_{2/1} + \overrightarrow{v(M)}_{1/0}$$

Calculer, en justifiant la démarche, successivement les vecteurs accélération :

☐ **6** - $\overrightarrow{a(B)}_{2/0}$.

☐ **7** - $\overrightarrow{a(C)}_{2/0}$.

☐ **8** - $\overrightarrow{a(M)}_{2/0}$.

☐ **9** - $\overrightarrow{a(M)}_{3/0}$.

☐ **10** - Vérifier la loi de composition des accélérations sur l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{a(M)}_{3/0} = \overrightarrow{a(M)}_{3/2} + \overrightarrow{a(M)}_{2/0} + 2\,\vec{\Omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{3/2}$$

1 Trajectoires

$\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} = \vec{e} \wedge \vec{u}$ où α est la mesure de la rotation effectuée autour de la direction $\vec{u} = \vec{u}(\alpha, \ldots)$

$$\vec{t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \qquad \frac{\vec{n}}{R} = \frac{d\vec{t}}{ds} \qquad \vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} \qquad ds = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

2 Cinématique du point

$$\overrightarrow{v(M)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \; ; \qquad \overrightarrow{a(M)} = \frac{d\overrightarrow{v(M)}}{dt} \; ; \qquad \overrightarrow{v(M)} = v\,\vec{t} \; ; \qquad \overrightarrow{a(M)} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

3 Formule de la dérivation composée

$$\boxed{\frac{d^{(0)}\vec{U}}{dt} = \frac{d^{(1)}\vec{U}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{U}}$$ $\forall$ les référentiels R_0 et R_1.

4 Composition des mouvements

R_i, R_j et R_k étant trois repères quelconques

Composition des vitesses de rotation

$$\vec{\Omega}_{i/k} = \vec{\Omega}_{i/j} + \vec{\Omega}_{j/k}$$

Composition des vitesses

R_k = repère "absolu" $\qquad$ R_j = repère "relatif"

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{ent} \qquad \vec{v}_{abs} = \frac{d^{(k)}\overrightarrow{O_kM}}{dt} \qquad \vec{v}_{rel} = \frac{d^{(j)}\overrightarrow{O_jM}}{dt} \qquad \vec{v}_{ent} = \frac{d^{(k)}\overrightarrow{O_kM_j}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v(M)}_{M/k} = \overrightarrow{v(M)}_{M/j} + \overrightarrow{v(M)}_{j/k}$$

Notation plus générale : $\overrightarrow{v(M)}_{i/k} = \overrightarrow{v(M)}_{i/j} + \overrightarrow{v(M)}_{j/k}$

Composition des accélérations

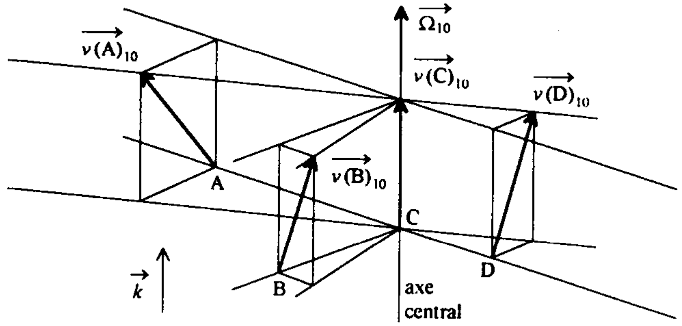
$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{ent} + \vec{a}_{Cor} \text{ avec } \vec{a}_{abs} = \frac{d^{(k)}\vec{v}_{abs}}{dt}$$

$$\vec{a}_{rel} = \frac{d^{(j)}\vec{v}_{rel}}{dt} \qquad \vec{a}_{ent} = \frac{d^{(k)}\vec{v}_{ent}}{dt} = \frac{d^{(k)2}\,\overrightarrow{O_kM_j}}{dt^2} \qquad \vec{a}_{Cor} = 2\,\overrightarrow{\Omega_{ent}} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{rel}$$

Notation plus générale : $\overrightarrow{a(M)}_{i/k} = \overrightarrow{a(M)}_{i/j} + \overrightarrow{a(M)}_{j/k} + \overrightarrow{a(M)}_{Cor} \qquad \overrightarrow{a(M)}_{Cor} = 2\,\overrightarrow{\Omega_{j/k}} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{i/j}$

5 Cinématique du solide

Le champ des vitesses est un torseur : $\overrightarrow{v(A)}_{1/0} = \overrightarrow{v(B)}_{1/0} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BA}$.



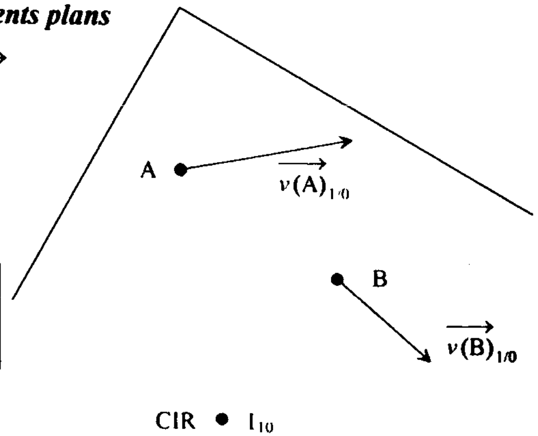
Le champ des accélérations **n'**est **pas** un torseur !

$$\overrightarrow{a(A)}_{1/0} = \overrightarrow{a(B)}_{1/0} + \frac{d^{(0)}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}}{dt} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BA})$$

6 Cinématique du solide : mouvements plans

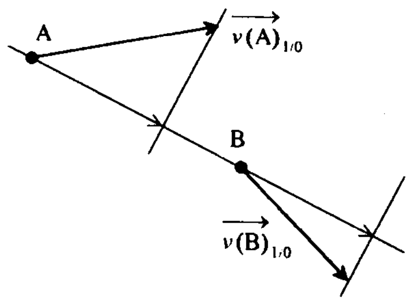
Centre Instantané de Rotation : $\overrightarrow{v(I_{10})}_{1/0} = \vec{0}$

Translation : le CIR est rejeté à l'∞, dans la direction perpendiculaire à la vitesse.



Equiprojectivité :

$$\overrightarrow{v(A)}_{1/0} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v(B)}_{1/0} \cdot \overrightarrow{AB}$$



Théorème des trois plans mobiles :

Les trois CIR I_{20}, I_{21} et I_{10} sont alignés. $\qquad$ Note : $I_{ij} \equiv I_{ji}$.