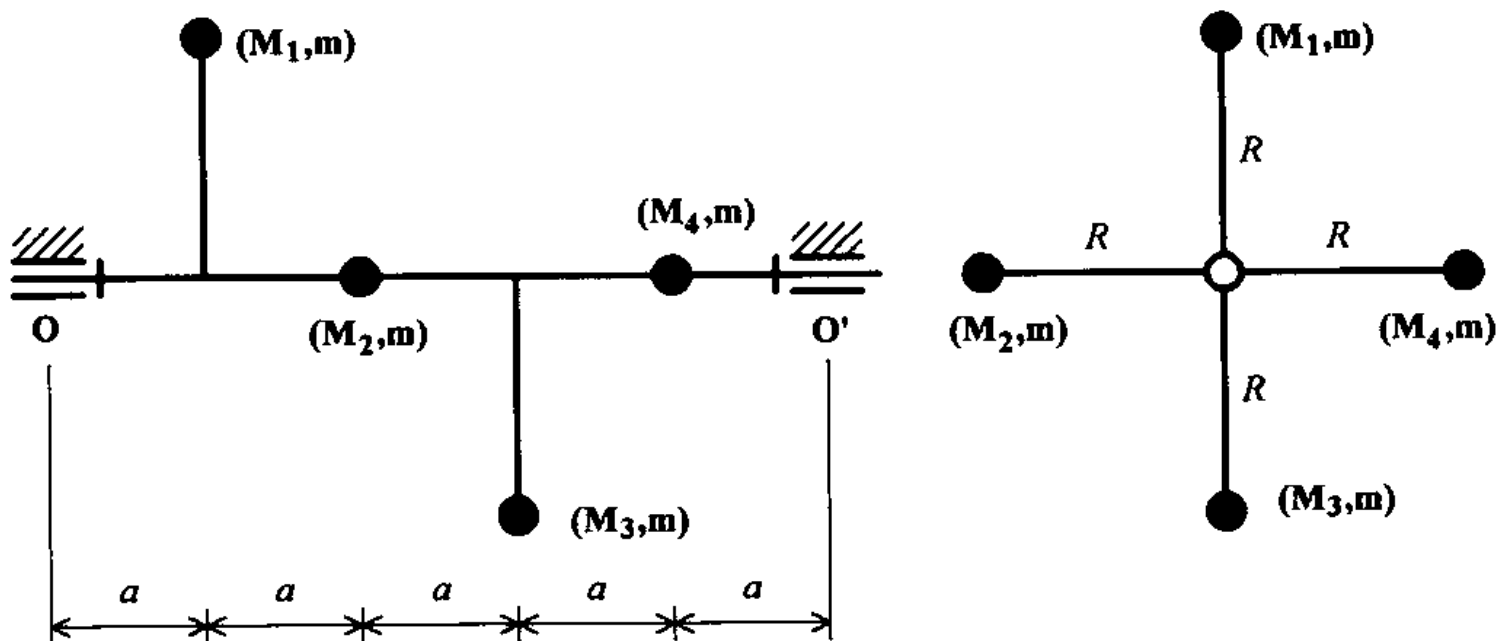


**COMMENCEZ PAR  
LIRE L'ÉNONCÉ  
ENTIÈREMENT  
ET  
ATTENTIVEMENT.**

- Durée : 2 heures.
- DOCUMENTS NON-AUTORISÉS, À L'EXCEPTION DE L'AIDE-MÉMOIRE FOURNI AVEC LE SUJET.
- Les trois parties sont *indépendantes*.
- Les réponses sont à reporter sur le document distribué avec le sujet.
- Noter le **NOM**, le **PRÉNOM**, le **GROUPE**, indiqué par 1 lettre à cercler : A, B, C ou D.
- Le sujet comporte 4 pages numérotées auquel s'ajoute l'aide-mémoire (1 page).
- Le document réponses comporte 5 pages numérotées.

### 1 Application directe du cours : cinétique (8 pts)

Un rotor (1) est constitué d'un axe de masse négligeable et de quatre bras de masse négligeable, à l'extrémité desquels sont fixées 4 masselottes (points matériels) identiques, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Les quatre points matériels  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  font partie du rotor indicé (1).

Nous définissons :

—  $R_0 = (O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ , référentiel fixe, avec  $\vec{k}_0$  sur la droite  $OO'$ , dirigé de  $O$  vers  $O'$ ,

—  $R_1 = (O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ , référentiel lié au rotor, avec  $\vec{k}_1 = \vec{k}_0$  et  $M_1$  contenu dans le plan  $(O, \vec{k}_1, \vec{i}_1)$ .

La position du rotor (1) est repérée par l'angle  $\alpha(t) = \omega_0 t$ .

**ATTENTION!** Sur la figure ci-dessus, le rotor est représenté dans une position simple correspondant à  $\alpha = 0$  (à  $2\pi$  près!).

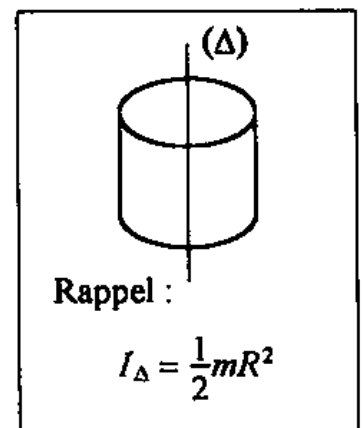
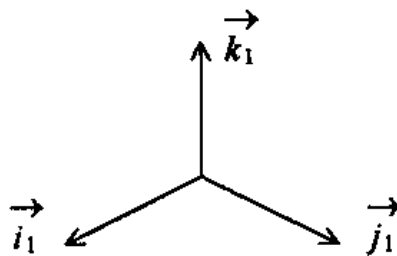
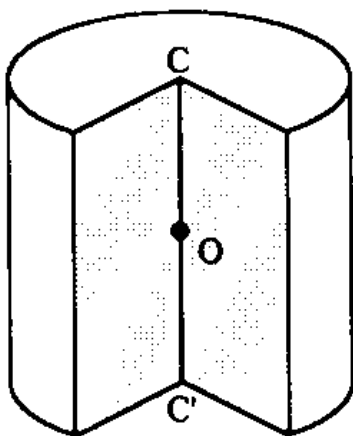
Les quatre bras ont même longueur, notée  $R$ , et les positions axiales des quatre masses sont définies par les relations :  $\vec{OM}_1 \cdot \vec{k}_0 = a$ ,  $\vec{OM}_2 \cdot \vec{k}_0 = 2a$ ,  $\vec{OM}_3 \cdot \vec{k}_0 = 3a$  et  $\vec{OM}_4 \cdot \vec{k}_0 = 4a$ .

Calculer, dans le mouvement du rotor par rapport au référentiel fixe  $R_0$ .

- 1 - (2 points) sa quantité de mouvement et sa quantité d'accélération,
- 2 - (2 points) son moment cinétique au point  $O$ , exprimé dans le repère d'écriture  $R_1$ ,
- 3 - (2 points) son moment dynamique au point  $O$ , exprimé dans le repère d'écriture  $R_1$ .
- 4 - (2 points) AN. Calculer numériquement et dans le système d'unités S.I. les composantes (dans  $R_1$ ) des quatre vecteurs déterminés ci-avant, avec :  $a = 20$  mm,  $R = 40$  mm,  $\omega_0 = 157$  rad/s,  $m = 50$  g.

## 2 Application directe du cours : matrice d'inertie d'un cylindre, pas de révolution (15 pts)

Il s'agit d'un cylindre de... révolution, homogène (masse volumique constante  $\rho$ ), de hauteur  $H$  et de rayon  $R$ , dont on a éliminé  $1/4$  de la matière, selon deux plans de coupe orthogonaux  $(O, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  et  $(O, \vec{k}_1, \vec{i}_1)$ . La masse de ce trois-quart de cylindre est  $M$ .



Nous allons définir la matrice d'inertie  $[I]_{O, R_1}$  de ce solide homogène, de masse  $M$ , dans le repère  $R_1 = (O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  (qui n'est pas "repère principal d'inertie").

- 1 - (2 points) Calculer  $\mathcal{E} = \int z^2 dm$ . Conseil : "prendre un  $dm$  à  $z = cste$ ".

2 - (2 points) Dédurre rapidement du rappel (voir encadré ci-dessus) la valeur de  $C = \int (x^2 + y^2) dm$ .

3 - (3 points) Calculer, en utilisant les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , le produit d'inertie  $F = \int xy dm$ .

Les trois coordonnées  $(r, \theta, z)$  sont indépendantes.

Vous êtes amené à calculer la quantité  $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta$ . Vérifiez qu'elle vaut  $-\frac{1}{2}$ .

4 - (3 points) Terminer les calculs et montrer que la matrice d'inertie  $[I]_{O,R_1}$  est de la forme

$$[I]_{O,R_1} = \begin{bmatrix} k_1 M(3R^2 + H^2) & k_2 MR^2 & 0 \\ k_2 MR^2 & k_1 M(3R^2 + H^2) & 0 \\ 0 & 0 & k_3 MR^2 \end{bmatrix}$$

Donner les valeurs des coefficients scalaires  $k_1, k_2, k_3$ .

**ATTENTION!** A partir de maintenant, que vous ayez répondu ou pas aux questions précédentes, vous considérez que la matrice d'inertie du solide, au point O et dans le référentiel  $R_1$  s'écrit comme ci-dessus avec

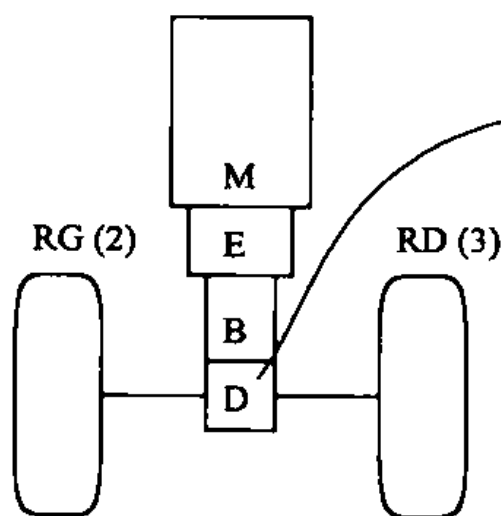
$$k_1 = 0,1 \quad k_2 = 0,05 \quad k_3 = 0,5$$

5 - (3 points) Le repère  $R_1$  n'est pas un repère principal d'inertie. Pouvez-vous définir, en justifiant votre réponse, un repère principal d'inertie  $R_p$ , défini en O, pour ce solide. Ecrire alors  $[I]_{O,R_p}$ .

6 - (2 points) AN. Calculer  $A, B, C$  et  $F$  avec  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3, H = 50 \text{ mm}, R = 25 \text{ mm}$ .

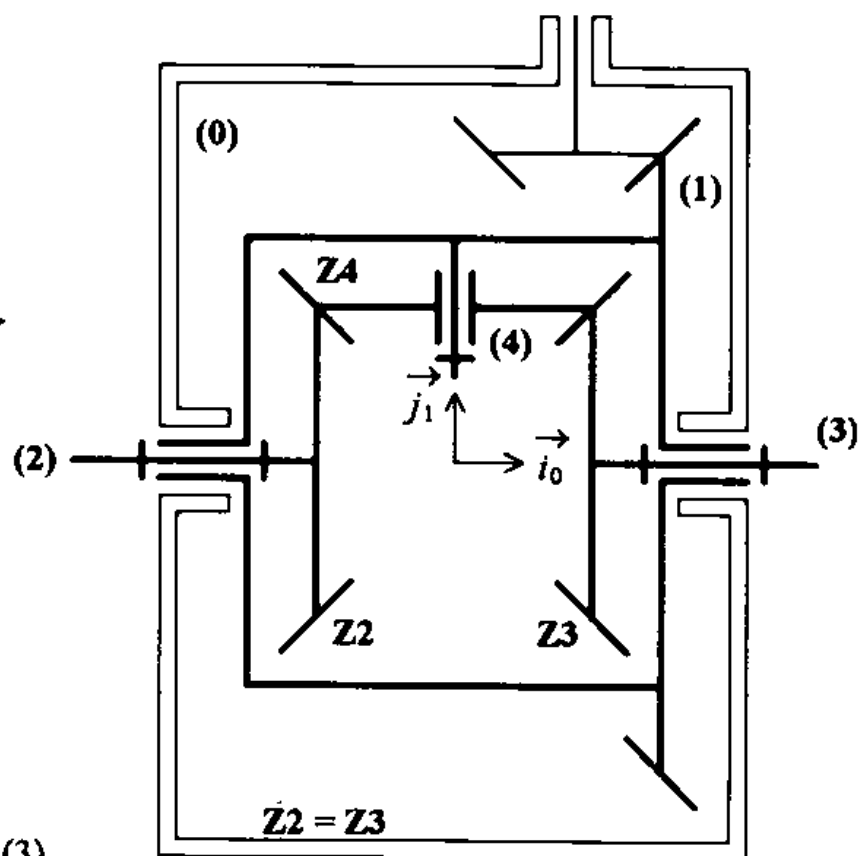
### 3 Exercice de cinématique : différentiel classique de véhicule automobile (13 pts)

M : moteur      E : embrayage  
B : boîte de vitesses



D : différentiel

RG et RD : roue gauche (2) et roue droite (3).



Le plan en annexe n'est donné que pour information.

Sur les roues avant d'une traction (la quasi totalité des voitures modernes) ou sur les roues arrière d'une propulsion (quelques Volvo, Ford, etc.), il est indispensable de placer un différentiel afin de rendre indépendantes les deux roues motrices. Faute de quoi il ne serait pas commode de négocier les virages... et nous aurions à changer de pneumatiques toutes les 3 semaines !

L'arbre de sortie de la boîte de vitesses correspond à l'arbre d'entrée du différentiel. Nous considérerons comme entrée le mouvement de la roue conique (1) par rapport à la "caisse" du véhicule (référentiel (0)) :  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{1/0} \vec{i}_0$ .

□ 1 - (2 points) Se placer "sur" le porte-satellite (1) et écrire la relation très très simple liant les vitesses de rotation  $\omega_{2/1}$  et  $\omega_{3/1}$  des roues dentées (2) et (3).

En déduire la relation très simple liant les vitesses de rotation  $\omega_{2/0}$ ,  $\omega_{3/0}$  et  $\omega_{1/0}$ , quelque soit les conditions d'utilisation du véhicule.

□ 2 - Par utilisation de la composition des mouvements, préciser les valeurs de  $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}$  et  $\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$  lorsque le véhicule se déplace, à la vitesse  $v$

— 2.1) (2 points) en ligne droite,

— 2.2) (4 points) en virage à droite, selon le schéma suivant :

On posera  $R_2 - R_3 = E$  et on donnera

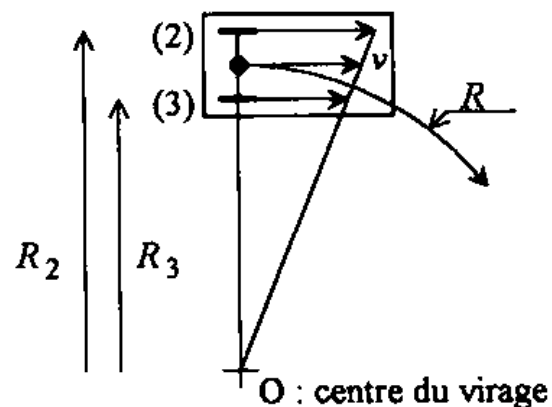
les résultats en fonction de  $E$  et  $R$ .

$v$  correspond à la vitesse du point situé

à mi-distance entre les roues (2) et (3).

La roue (2), à l'extérieur du virage, admet en son centre une vitesse  $v_2 (> v)$

et la roue (3) ...



□ 3 - L'inconvénient majeur de ce différentiel classique dont le rendement est proche de 1 (denture droite, frottement négligeable !) est qu'il ne permet pas de se sortir de la situation délicate dans laquelle nous nous trouvons lorsque la roue droite patine sur le bas-côté glissant de la route (boues, verglas, etc.) et ce même si la roue gauche adhère parfaitement à la chaussée.

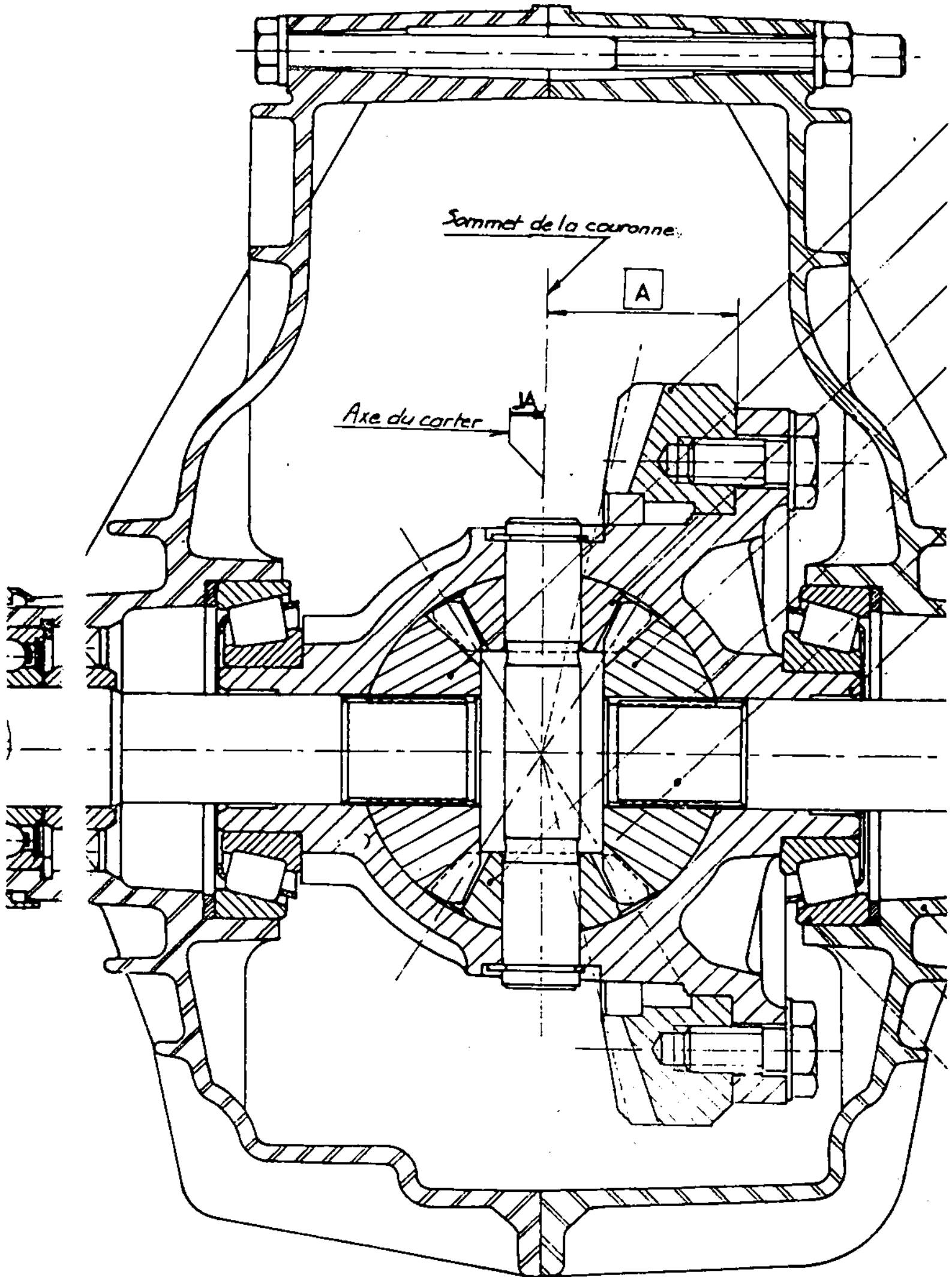
Le véhicule (propulsion) est supposé à l'arrêt sur le parking de l'ENIB (il n'y a pas de boue et le sol est parfaitement sec, pour une fois !). Le conducteur quitte son emplacement calmement. Nous avons un état d'équilibre quasi statique et nous pouvons appliquer le principe fondamental de la statique.

— 3.1) (1 points) Isoler la roue droite (voir figure 3.1) et exprimer  $F_{T4/3}$ , effort de contact supposé purement tangentiel exercé par le satellite (4) sur la roue cônica (3), en fonction du couple  $C_{ext/3}$  appliqué par l'extérieur (tout ce qui n'est pas lié au contact 4/3 et à la liaison pivot  $L_{1/3}$ ) sur la roue (3) et du rayon  $r_3$  de la roue cônica.

— 3.2) (1 points) Faites de même pour la roue gauche (voir figure 3.2) et exprimer  $F_{T4/2}$ , effort de contact supposé purement tangentiel exercé par le satellite (4) sur la roue cônica (2), en fonction du couple  $C_{ext/2}$  appliqué par l'extérieur (tout ce qui n'est pas lié au contact 4/2 et à la liaison pivot  $L_{1/2}$ ) sur la roue (2) et du rayon  $r_2$  de la roue cônica.

— 3.3) (1 points) Isoler le satellite (4) (voir figure 3.3) et en déduire la relation liant  $C_{ext/3}$  et  $C_{ext/2}$ .

— 3.4) (2 points) Conclure en vérifiant la véracité de l'inconvénient du différentiel classique énoncé dans les 4 premières lignes de la présente question.



1 Formule de la dérivation composée

$$\frac{d^{(0)} \vec{U}}{dt} = \frac{d^{(1)} \vec{U}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{U} \quad \forall \text{ les référentiels } R_0 \text{ et } R_1.$$

2 Composition des mouvements

Composition des vitesses de rotation

$$\vec{\Omega}_{ijk} = \vec{\Omega}_{ijl} + \vec{\Omega}_{jlk}$$

Composition des vitesses

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{ent}$$

$$\vec{v}(M)_{ijk} = \vec{v}(M)_{ijl} + \vec{v}(M)_{jlk}$$

Composition des accélérations

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{ent} + \vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{a}(M)_{ijk} = \vec{a}(M)_{ijl} + \vec{a}(M)_{jlk} + \vec{a}(M)_{Cor}$$

avec  $\vec{a}(M)_{Cor} = 2 \vec{\Omega}_{jlk} \wedge \vec{v}(M)_{ijl}$

3 Cinématique du solide

Le champ des vitesses est un torseur :  $\vec{v}(A)_{1/0} = \vec{v}(B)_{1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{BA}$ .

Le champ des accélérations n'est pas un torseur !

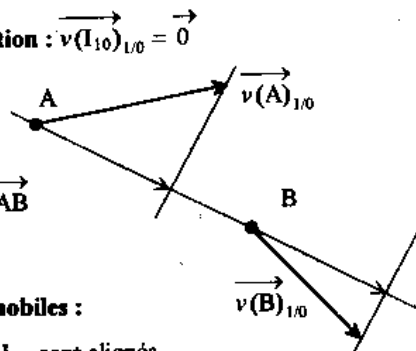
$$\vec{a}(A)_{1/0} = \vec{a}(B)_{1/0} + \frac{d^{(0)} \vec{\Omega}_{1/0}}{dt} \wedge \vec{BA} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{BA})$$

4 Cinématique du solide : mouvements plans

Centre Instantané de Rotation :  $\vec{v}(I_{10})_{1/0} = \vec{0}$

Equiprojectivité :

$$\vec{v}(A)_{1/0} \cdot \vec{AB} = \vec{v}(B)_{1/0} \cdot \vec{AB}$$



Théorème des trois plans mobiles :

Les trois CIR  $I_{20}, I_{21}$  et  $I_{10}$  sont alignés.

Note :  $I_{ij} = I_{ji}$ .

5 Eléments de cinétique d'un système de points matériels

Torseur cinétique :

Quantité de mouvement :  $\vec{p} = \sum_i \left[ m_i \vec{v}(M_i) \right]$ .

Moment cinétique en C :  $\vec{L}_C = \sum_i \left[ \vec{CM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i) \right]$ .

Torseur dynamique :

Quantité d'accélération  $\vec{D} = \sum_i \left[ m_i \vec{a}(M_i) \right]$ .

Moment dynamique en C :  $\vec{N}_C = \sum_i \left[ \vec{CM}_i \wedge m_i \vec{a}(M_i) \right]$ .

$$\vec{p} = m \vec{v}(G) \quad \vec{D} = m \vec{a}(G) \quad \text{avec } m = \sum_i [m_i]$$

Relations torseur cinétique / torseur dynamique :

$$\vec{D} = \frac{d \vec{p}}{dt} \quad \vec{N}_C = \frac{d \vec{L}_C}{dt} + \vec{v}(C) \wedge m \vec{v}(G)$$

6 Géométrie des masses

Barycentre :

$$\begin{aligned} m x_G &= \iiint_{PeS} x \, dm & m y_G &= \iiint_{PeS} y \, dm & m z_G &= \iiint_{PeS} z \, dm \\ m \vec{OG} &= \iiint_{PeS} \vec{OP} \, dm & m \vec{v}(G) &= \iiint_{PeS} \vec{v}(P) \, dm & m \vec{a}(G) &= \iiint_{PeS} \vec{a}(P) \, dm \end{aligned}$$

Inerties. Dans un référentiel  $(O_s, i_s, j_s, k_s)$  (généralement lié au solide S) :

$$[I]_{O_s} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \iiint_{PeS} (y^2 + z^2) \, dm \\ B = \iiint_{PeS} (x^2 + z^2) \, dm \\ C = \iiint_{PeS} (x^2 + y^2) \, dm \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D = \iiint_{PeS} yz \, dm \\ E = \iiint_{PeS} zx \, dm \\ F = \iiint_{PeS} xy \, dm \end{cases}$$

Au besoin, on sera parfois amené à calculer

$$\begin{cases} A' = \iiint_{PeS} x^2 \, dm \\ B' = \iiint_{PeS} y^2 \, dm \\ C' = \iiint_{PeS} z^2 \, dm \end{cases} \quad \text{et} \quad I_{O_s} = \iiint_{PeS} (x^2 + y^2 + z^2) \, dm$$

$I_{O_s}$  : moment d'inertie polaire, au point  $O_s$ .

$A, B, C$  : moments d'inertie par rapport aux axes  $(O_s, i_s), (O_s, j_s), (O_s, k_s)$ .

$D, E, F$  : produits d'inertie par rapport aux plans  $(O_s, j_s, k_s), (O_s, k_s, i_s), (O_s, i_s, j_s)$ .

7 Principe fondamental de la statique

Le torseur des forces extérieures est identiquement nul !

$$[F_{ext}]_C = [0]_C$$