

LE SUJET EST "LONG" MAIS LA RÉOLUTION PEUT ÊTRE "RAPIDE"

**COMMENCEZ PAR
LIRE L'ÉNONCÉ
ENTIÈREMENT
ET
ATTENTIVEMENT.**

- Durée : 2 heures.
- DOCUMENTS INTERDITS À L'EXCEPTION DE L'AIDE MÉMOIRE DISTRIBUÉ AVEC LE SUJET (1 DOCUMENT A4).
- Les réponses sont à reporter sur le document distribué avec le sujet.
- Le sujet comporte 6 pages de texte numérotées + 1 aide-mémoire
- Le document-réponses comporte 6 pages numérotées.
- Notez vos **NOM, PRÉNOM** et **GROUPE** sur le document-réponses.

1 *Pas de force centrifuge ! (15 points)*

Un dispositif de travaux pratiques (ressemblant à celui qui se situe au "labo de méca") comprend 4 "solides" (voir figure 1) :

- une poutre homogène (1) que nous considérerons infiniment rigide, de longueur L , de masse m_1 , et dont le moment d'inertie par rapport à l'axe (A, \vec{k}_0) vaut $I_1 = \frac{1}{3} m_1 L^2$. Cette poutre est articulée sans frottement en A et en appui simple élastique en B (raideur de l'appui élastique : k),
- un stator (2) de moteur électrique, de masse m_2 , solidaire de (1), fixé en un point C de la poutre (le stator est *quasi* ponctuel),
- le rotor (3) de ce même moteur électrique, de masse m_3 , de moment d'inertie autour de son axe I_3 , animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante (plutôt rapide) $\omega_{3/2}$, mais réglable,
- une masselotte (4) ponctuelle, en M, de masse m_4 , fixée sur le rotor précédent et provoquant un balourd. L'excentration de cette masselotte est faible et notée e .

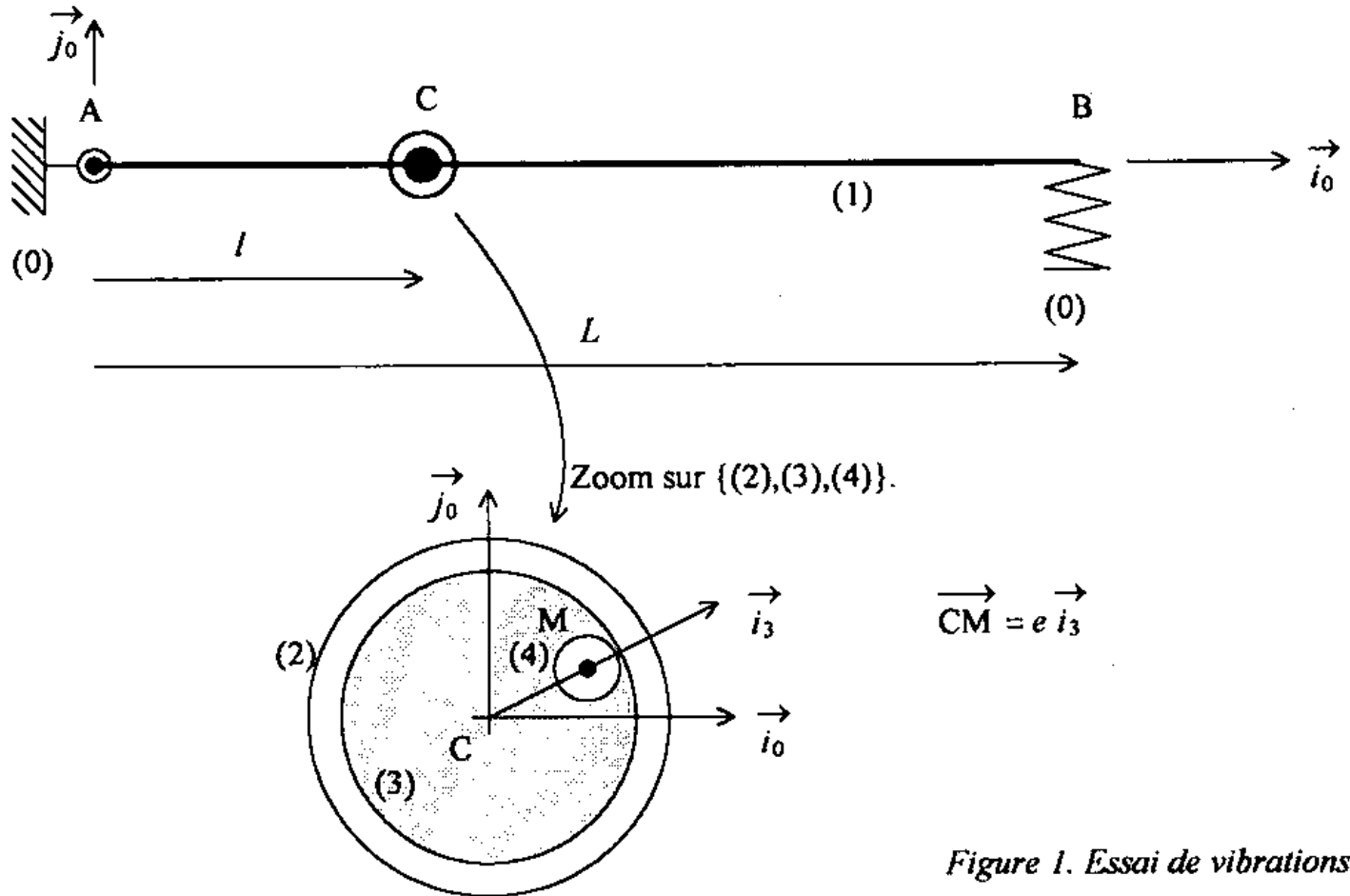


Figure 1. Essai de vibrations

Il s'agit d'un problème plan ! Nous définissons :

- $R_0 = (A, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, référentiel fixe, galiléen (\vec{i}_0 horizontal, \vec{j}_0 vertical ascendant !).
- $R_1 = (A, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, référentiel lié à la barre (1) (et au rotor (2)), avec $\vec{k}_1 = \vec{k}_0$.

La position de la barre (1) est repérée par l'angle $\alpha(t)$, qui reste toujours faible.

ATTENTION ! Sur la figure ci-dessus, la barre est représentée dans une position simple correspondant à $\alpha = 0$, position d'équilibre observée lorsque le moteur est à l'arrêt. Dans cette position, le ressort présente une flèche notée f_0 .

- $R_3 = (C, \vec{i}_3, \vec{j}_3, \vec{k}_3 = \vec{k}_0)$, référentiel lié au rotor (3) (et à la masselotte (4)).

La position du rotor (3) par rapport au stator (2) est repérée par l'angle $\theta(t) = \omega_{3/2} t$, avec $\omega_{3/2}$ réglable mais constante.

□ 1 - (2 points) Le bilan des forces extérieures fait apparaître comme seules actions sur le système isolé $\{(1),(2),(3),(4)\}$:

- les poids de (1), de (2) et de (3) (on néglige le poids de (4), mais pas sa masse !),
- l'action de liaison articulation sans frottement en A,
- l'action de liaison appui élastique (ressort de raideur k) en B.

Et c'est tout car il n'y a pas de force centrifuge ???!

Présenter ce bilan des forces extérieures, moteur à l'arrêt et moteur en marche, sous forme graphique, sur la figure de travail du document-réponses, et définir, dans R_0 , chacun des vecteurs forces par les torseurs associés en A. En particulier, exprimer le torseur définissant l'action du ressort en fonction de k, f_0, L, α .

Dans chaque cas, écrire en A le torseur des forces extérieures. Simplifier le cas "moteur en marche" sachant que, dans le cas "moteur à l'arrêt", le torseur des forces extérieures est nul (P.F. Statique)

2 (2 points) Dans la question ci-dessus, l'auteur parle de "négliger le poids de (4) sans négliger la masse de (4)". Justifier *avec précision* ce propos. L'auteur dit encore : "Il n'y a pas de force centrifuge ??!" Justifier *avec soin* cet autre propos.

ATTENTION! Pour la suite, nous n'aurons à calculer que le moment dynamique au point A de l'ensemble isolé $\{(1),(2),(3),(4)\}$, moteur en marche.

NOTE : Lorsque le moteur est "à l'arrêt", tous les torseurs dynamiques sont nuls ! Les résultats aux quatre questions ci-après seront exprimés sur \vec{k}_0 à l'aide de certaines des grandeurs suivantes : $I_1, m_2, m_4, l, e, \ddot{\alpha}, \omega_{3/2}, \epsilon$

3 (2 points) La barre (1) est un solide en rotation. Donner l'expression de son moment dynamique au point A.

4 (1 point) Le stator (2) est un point matériel (C, m_2) en rotation autour de A. Donner l'expression de son moment dynamique au point A.

5 (2 points) Le rotor (3) est un solide en rotation rapide autour de l'axe du moteur. Pour lui, nous négligeons l'influence du débattement $\alpha(t)$, que nous considérons nul. Donner l'expression de son moment dynamique au point C. En déduire l'expression de son moment dynamique au point A.

6 (4 points) La masselotte (4) est un point matériel en rotation rapide autour de l'axe du moteur. Pour lui, nous pouvons aussi négliger l'influence du débattement $\alpha(t)$. Donner l'expression de son moment dynamique au point C. En déduire l'expression de son moment dynamique au point A.

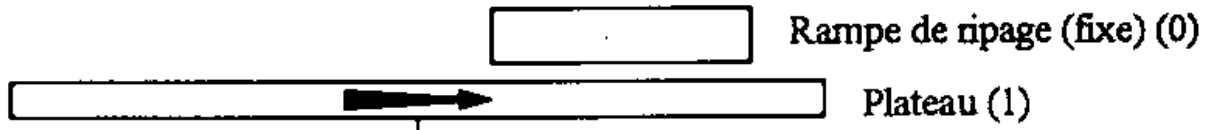
7 (2 points) L'équation de moment autour de l'axe (A, \vec{k}_0) du principe fondamental de la dynamique s'écrit sous la forme : $(I_1 + m_2 l^2) \ddot{\alpha} + kL^2 \alpha = lem_4 \omega_{3/2}^2 \sin(\omega_{3/2} t)$ L'équation sans second membre correspond au "régime transitoire" et l'équation complète au "régime permanent".

Résoudre l'équation différentielle dans le cas du régime transitoire.

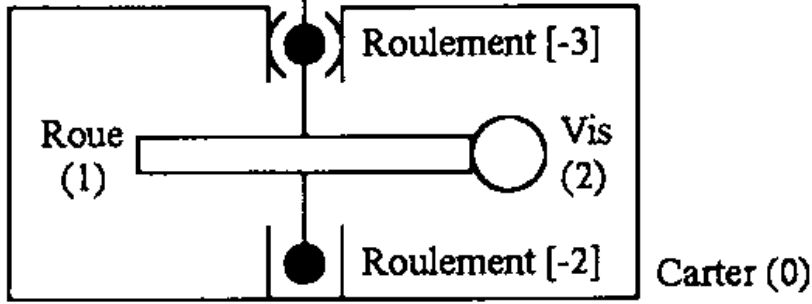
2 Machine de déconsignation des bouteilles (15 points)

L'étude concerne le réducteur d'une machine de déconsignation de bouteilles, installée en libre-service dans certaines grandes surfaces. Pour information, le plan est donné en annexe du sujet.

Le client pose les bouteilles, debout, sur un plateau (1) horizontal. La détection, l'acceptation et le rejet de la bouteille sont contrôlés par un automate programmable industriel.



Vue de face



rapports de réduction :

1er engrenage (3)/(2)

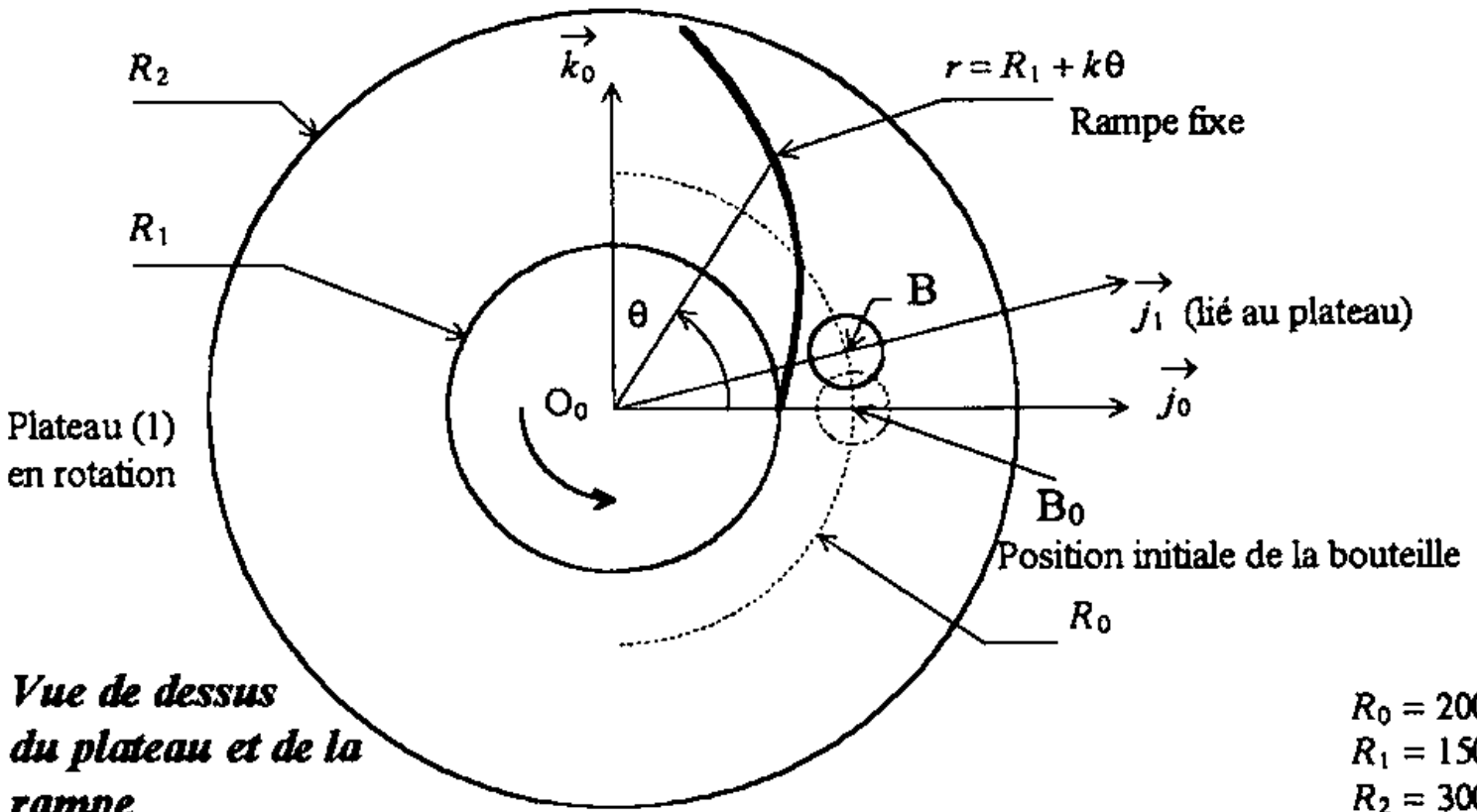
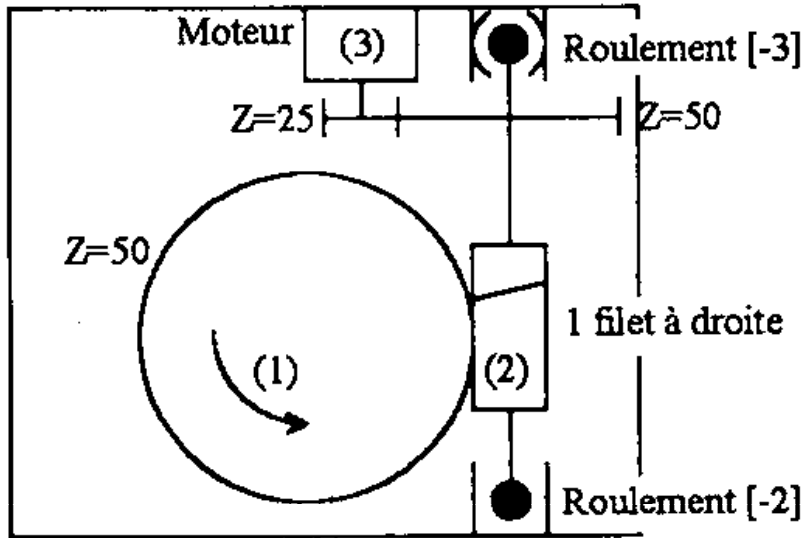
$$i_1 = \frac{1}{2}$$

2nd engrenage (2)/(1)

$$i_2 = \frac{1}{50}$$

rapport global : $i = \frac{1}{100}$

Vue de dessus de la transmission seule



Vue de dessus du plateau et de la rampe

$$R_0 = 200 \text{ mm}$$

$$R_1 = 150 \text{ mm}$$

$$R_2 = 300 \text{ mm}$$

$$k = \frac{100}{\pi} \text{ mm/rad}$$

Figure 2. Machine de déconsignation

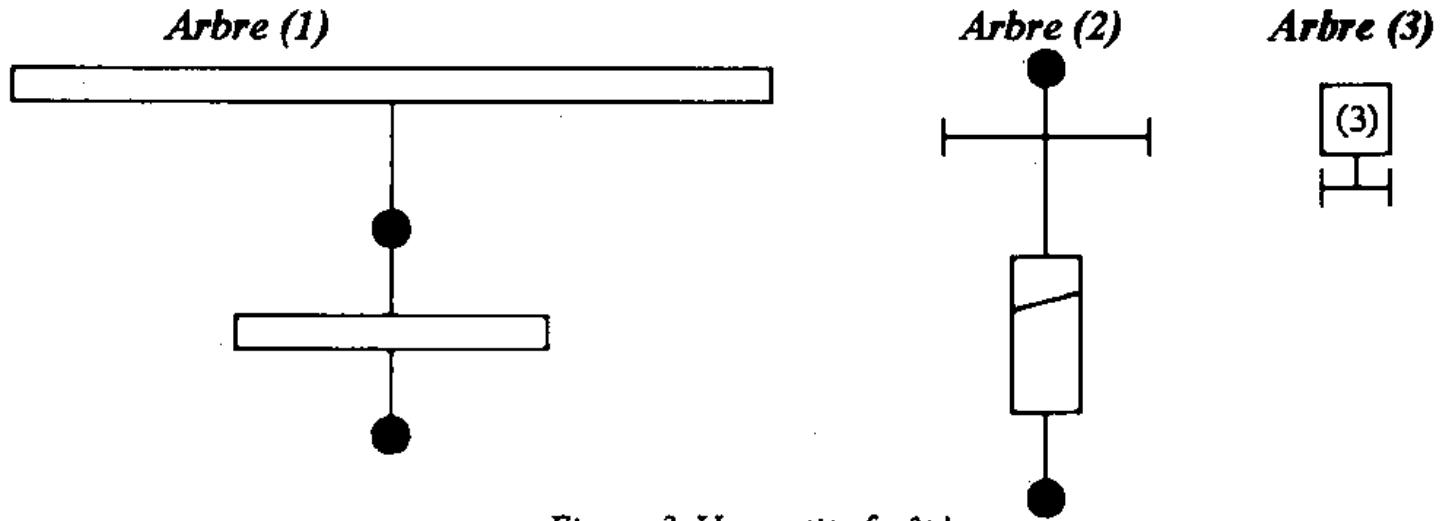


Figure 3. Une petite forêt !

Un moteur à courant continu assure la mise en rotation du plateau, selon la loi suivante :

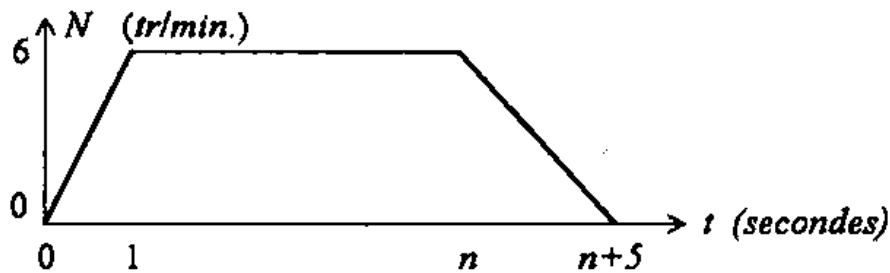


Figure 4. Diagramme des vitesses

Nous supposons toutes les liaisons sans frottement.

La position initiale de la bouteille est définie par le rayon R_0 et la direction (O_0, \vec{j}_0) coïncidant avec le début de la définition matérielle de la rampe. La transmission comprend :

- un moteur CC (LDV104, mais peu importe),
- un engrenage cylindrique parallèle à denture droite, de rapport 1/2,
- un couple roue et vis sans fin, de rapport 1/50.

A l'exception du plateau et des bouteilles situées sur celui-ci, les inerties de tous les autres arbres sont négligées.

Nous étudions la phase de mise en mouvement du plateau de moment d'inertie autour de son axe de rotation noté simplement I_1 .

1 - (1 point) Calculer l'accélération angulaire maximale du plateau (1) notée $\ddot{\theta}_1$, puis celle de l'arbre du moteur d'entraînement, notée $\ddot{\theta}_{\text{moteur}}$.

2 - (2 point) Nous admettons que lorsque la bouteille est en contact avec la rampe fixe, elle se déplace radialement suivant une loi $r_B = r + d/2$, avec $r_B = O_0B$ et d ($= 80$ mm) correspondant au diamètre de la bouteille. Le contact s'établit-il avant ou après la fin de la phase d'accélération ?

NOTE : le contact étant établi, il y a ensuite "ripage" vers l'extérieur, mais les choses deviennent alors plus complexes. Nous nous limitons à la phase accélérée.

□ 3 - (2 points) L'isolement de l'arbre moteur (3), d'inertie négligeable, permet d'écrire l'équation du principe fondamental de la dynamique : équation de moment autour de l'axe de rotation fixe, sous la forme :

$$C_{\text{moteur}} + C_{2/3} = 0$$

Isoler de la même façon l'arbre intermédiaire (2) (qui porte la vis sans fin) et écrire l'équation du principe fondamental de la dynamique : équation de moment autour de l'axe de rotation fixe.

Isoler enfin l'arbre (1) support de plateau et écrire l'équation du principe fondamental de la dynamique : équation de moment autour de l'axe de rotation fixe.

□ 4 - (4 points) Le rendement est supposé égal à 1. La puissance transmise d'arbre en arbre se conserve.

$$\text{Exemple : } |C_{3/2}| \times |\omega_{20}| = |C_{2/3}| \times |\omega_{30}|$$

En déduire l'expression du module du couple moteur en fonction de $I_1, i, \ddot{\theta}_{\text{moteur}}$.

Le rendement global est égal à $\eta = 0,6$. En déduire l'expression du couple moteur dans ce cas.

□ 5 - (2 points) Nous allons développer le calcul de I_1 . La matrice d'inertie du plateau (1) en alliage léger ($\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$) d'épaisseur H s'écrit, dans le référentiel $(O_0, \vec{i}_1 = i_0, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, sous la forme :

$$[I_1]_{O_0, R_1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} m_1 R_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m_1 R_2^2 + \frac{1}{3} m_1 H^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} m_1 R_2^2 + \frac{1}{3} m_1 H^2 \end{vmatrix}$$

Il est possible de déposer jusqu'à 10 bouteilles sur le plateau. Nous modélisons ce cas en considérant que les bouteilles sont des cylindres de $d = 80 \text{ mm}$ de diamètre, de hauteur $h = 200 \text{ mm}$ et de masse $m_B = 240 \text{ g}$, et qu'elles sont également réparties sur un cercle de rayon $R_b = 240 \text{ mm}$.

Calculer le moment d'inertie autour de l'axe (O_0, \vec{i}_1) pour cet ensemble $\{(\text{plateau}), (\text{bouteilles})\}$.

□ 6 - (2 points) Nous allons comparer le résultat précédent avec celui que nous obtiendrions en considérant les bouteilles comme autant de masses ponctuelles.

Pour cela, évaluer le rapport $\lambda = \frac{I_{\text{masses ponctuelles}}}{I_{\text{cylindres diamètres}}}$ des inerties des bouteilles seules selon chacune des hypothèses et interpréter le résultat.

□ 7 - (2 points) Calculer numériquement le couple de démarrage du moteur, en admettant un rendement global de 0,6.

1 Composition des mouvements

Composition des vitesses de rotation : $\vec{\Omega}_{i/k} = \vec{\Omega}_{i/j} + \vec{\Omega}_{j/k}$

Composition des vitesses : $\vec{v}_{ab} = \vec{v}_{ad} + \vec{v}_{bd}$
 $v(M)_{i/k} = v(M)_{i/j} + v(M)_{j/k}$

Composition des accélérations : $\vec{a}_{ab} = \vec{a}_{ad} + \vec{a}_{bd} + \vec{a}_{Cor}$
 $a(M)_{i/k} = a(M)_{i/j} + a(M)_{j/k} + a(M)_{Cor}$
 avec $a(M)_{Cor} = 2\vec{\Omega}_{j/k} \wedge v(M)_{i/j}$

2 Cinématique du solide

Le champ des vitesses est un torseur : $v(A)_{1/0} = v(B)_{1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge BA$

Le champ des accélérations n'est pas un torseur !

$$a(A)_{1/0} = a(B)_{1/0} + \frac{d^{(0)}\vec{\Omega}_{1/0}}{dt} \wedge BA + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (\vec{\Omega}_{1/0} \wedge BA)$$

3 Eléments de cinétique d'un système de points matériels

Torseur cinétique :

Quantité de mouvement : $\vec{p} = \sum_i [m_i \vec{v}(M_i)]$. Moment cinétique en C : $L_C = \sum_i [CM_i \wedge m_i v(M_i)]$

Torseur dynamique :

Quantité d'accélération : $\vec{D} = \sum_i [m_i \vec{a}(M_i)]$. Moment dynamique en C : $N_C = \sum_i [CM_i \wedge m_i a(M_i)]$

Relations : $\vec{p} = m v(G)$ $\vec{D} = m a(G)$ avec $m = \sum [m_i]$

$\vec{D} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $N_C = \frac{dL_C}{dt} + v(C) \wedge m v(G)$

4 Géométrie des masses

Barycentre : $m x_G = \iiint_{P \in S} x dm$ $m y_G = \iiint_{P \in S} y dm$ $m z_G = \iiint_{P \in S} z dm$
 $m \vec{OG} = \iiint_{P \in S} \vec{OP} dm$ $m v(G) = \iiint_{P \in S} v(P) dm$ $m a(G) = \iiint_{P \in S} a(P) dm$

Inerties. Dans un référentiel $(O_S, \vec{i}_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S)$ (généralement lié au solide S) :

$$[I]_{O_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} A = \iiint_{P \in S} (y^2 + z^2) dm \\ B = \iiint_{P \in S} (x^2 + z^2) dm \\ C = \iiint_{P \in S} (x^2 + y^2) dm \end{cases} \text{ et } \begin{cases} D = \iiint_{P \in S} yz dm \\ E = \iiint_{P \in S} zx dm \\ F = \iiint_{P \in S} xy dm \end{cases}$$

Au besoin, on sera parfois amené à calculer

$$\begin{cases} A' = \iiint_{P \in S} x^2 dm \\ B' = \iiint_{P \in S} y^2 dm \\ C' = \iiint_{P \in S} z^2 dm \end{cases} \text{ et } I_{O_S} = \iiint_{P \in S} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

I_{O_S} : moment d'inertie polaire, au point O_S .

A, B, C : moments d'inertie par rapport aux axes (O_S, \vec{i}_S) , (O_S, \vec{j}_S) , (O_S, \vec{k}_S) .

D, E, F : produits d'inertie par rapport aux plans $(O_S, \vec{j}_S, \vec{k}_S)$, $(O_S, \vec{k}_S, \vec{i}_S)$, $(O_S, \vec{i}_S, \vec{j}_S)$.

5 Principe fondamental de la statique

Le torseur des forces extérieures est identiquement nul !

$$[F_{ext}]_C = [0]_C$$

6 Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen R_0 (fixe, absolu ?)... et avec une "bonne" montre :

le torseur des forces extérieures appliquées à un système matériel et développé en un point quelconque C est égal au torseur dynamique de ce système matériel dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen et développé en ce même point C :

$$[F_{ext}]_C = [N]_C$$

Ce qui nous donne deux théorèmes :

Théorème de la résultante dynamique :	$\vec{F}_{ext} = \vec{D}$
Théorème du moment dynamique en C :	$\vec{M}_{ext/C} = \vec{N}_C$

NOTE : Ces théorèmes sont vrais pour tout système matériel : un point, un ensemble de points matériels, un solide, un ensemble de solides, un morceau de solide, une certaine quantité de fluide (gaz, liquide)...

Solide en translation sur un axe orienté par \vec{i}_0 :	$\vec{F}_{ext} \cdot \vec{i}_0 = m \ddot{x}$
Solide en rotation autour d'un axe fixe (O, \vec{i}_0) :	$\vec{M}_{O, ext} \cdot \vec{i}_0 = I \ddot{\theta}$