ENIB 3N, 3S abc et 3S méca. CONTROLE DE MATHEMATIQUES Le 23.10.01

DUREE : 2 heures

DOCUMENT AUTORISE : une feuille de notes

I a et b sont deux réels tels que : $0 < a \leq b < \pi$ et $a+b \leq \pi$.

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire, définie par :

$$f(t) \begin{cases} = 1 & \text{si } t \in [0, b-a] \\ = -\frac{1}{2a}\left[t-(a+b)\right] & \text{si } t \in [b-a, b+a] \\ = 0 & \text{si } t \in [a+b, \pi] \end{cases}$$

1°/ Donner l'allure de la courbe représentative de f.

2°/ Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad f(t) = \frac{b}{\pi} + \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin(na)\sin(nb)}{n^2} \cos(nt) \right].$$

3°/ En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g définie par : $g(t) = f(\pi t)$.

4°/ 4.1 : Calculer la somme des séries convergentes :

4.1.1 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\sin(nb)}{n^2}$.

4.1.2 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)\sin^2(nb)}{n^4}$.

4.2 : En déduire, en choisissant convenablement a et b, la somme des séries convergentes :

4.2.1 : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

4.2.2 : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

II f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) \begin{cases} = e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

1°/ 1.1 : Déterminer $\hat{f}$ et $\hat{g}$, où g est la fonction définie par : $g(t) = f(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1.2 : Démontrer que : $f + g = 2a(f * g)$.

2°/ $n \in \mathbb{N}$. On note φ_n la fonction définie par : $\varphi_n(t) = t^n f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2.1 : Déterminer $\widehat{\varphi_1}$, puis $\widehat{\varphi_n}$.

2.2 : Déterminer $\widehat{\varphi_n * \varphi_m}$, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

En déduire l'expression de $(\varphi_n * \varphi_m)(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3°/ Π est la fonction "porte" définie par : $\Pi(t) \begin{cases} = 1 & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3.1 : Déterminer, en partant de la définition, $\Pi * f$.

3.2 : En déduire : $\Pi * [f + g]$.

4°/ h est la fonction définie par : $h(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

4.1 : Démontrer que $\hat{h}$ est la fonction définie par : $\hat{h}(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\nu|}$, $\forall \nu \in \mathbb{R}$.

4.2 : Déterminer la transformée de Fourier de la fonction u définie par :

$$u(t) = \frac{t}{(a^2 + t^2)^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5°/ Calculer la valeur des intégrales :

5.1 : $$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(a^2 + t^2)^2} \sin t \, dt.$$

5.2 : $$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^2}.$$

6°/ Déterminer une solution y de l'équation fonctionnelle :

$$y(t) - \frac{1}{2}\left[y(t+1) + y(t-1) \right] = (f'' * \Delta)(t)$$

où Δ désigne la fonction "triangle" définie par : $\Delta(t) \begin{cases} = 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ = 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$.