DOCUMENT AUTORISE : une feuille de notes.

I Résoudre l'équation : $\tan z = 1+i$.

II Q est la fonction définie dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$ par : $Q(x,y) = \dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$.

1) Vérifier que Q est harmonique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$.

2) Déterminer une fonction f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et de partie imaginaire Q. Exprimer $f(z)$ en fonction de z.

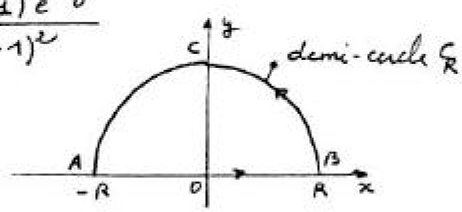
III f est la fonction complexe définie par : $f(z) = \dfrac{z^p}{2z^2-5z+2}$, $p \in \mathbb{N}$.

1) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\,dz$,

où C est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) En déduire, en utilisant un paramétrage de C, la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos p\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$.

IV f est la fonction complexe définie par : $f(z) = \dfrac{(z^2-1)e^{iz}}{(z^2+1)^2}$



γ_R^+ est le circuit $\widehat{ABCA}$ ci-contre, avec $\underline{R>1}$.

1) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz$.

2) Démontrer que : $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{\gamma_R^+} f(z)\,dz\right) = 2K$

où $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x^2-1)\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$ est une intégrale convergente.

3) En déduire la valeur de K.

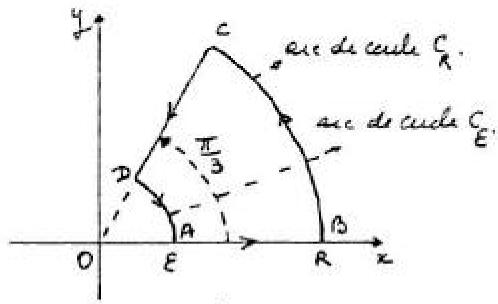
V f est la fonction complexe définie par : $f(z) = \dfrac{\log z}{z^6+1}$,

où log désigne la détermination du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ définie par $\log 1 = 0$.

1°/ Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\gamma^+_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz$,

où $\gamma^+_{R,\varepsilon}$ désigne le circuit $\overset{\frown}{ABCDA}$ ci-contre :

$(0 < \varepsilon < 1 < R)$



2°/ 2.1 : Démontrer que : $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{C^+_R=\overrightarrow{BC}} f(z)\,dz\right)=0$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{C^+_\varepsilon=\overrightarrow{AD}} f(z)\,dz\right)=0$

2.2 : En déduire : $\displaystyle\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0^+}}\left(\int_{\gamma^+_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz\right) = \left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)I - i\frac{\pi}{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}K$,

où I et J les deux intégrales convergentes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^6+1}\,dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}.$$

3°/ Quelles sont les valeurs de I et K ?