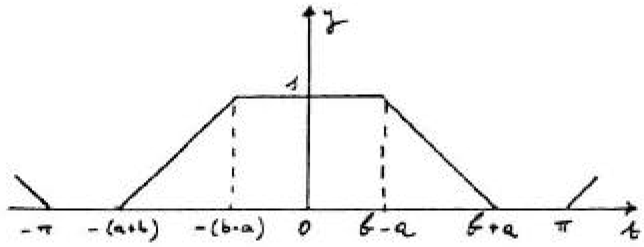
I f est 2π-périodique, paire et continue sur $\mathbb{R}$

1) $f(t) = 1$, si $t \in [0, b-a]$

$= -\frac{1}{2a}[t-(a+b)]$, si $t \in [b-a, b+a]$

$= 0$, si $t \in [b+a, \pi]$



2) $\boxed{b_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{b-a} \cos nt \, dt - \frac{1}{2a}\int_{b-a}^{b+a} [t-(a+b)]\cos nt \, dt.\right]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n = \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{b-a} - \frac{1}{2a}\left(\left[t-(a+b)\frac{\sin nt}{n}\right]_{b-a}^{b+a} - \frac{1}{n}\int_{b-a}^{b+a} \sin nt \, dt\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin[n(b-a)]}{n} - \frac{\sin[n(b-a)]}{n} - \frac{1}{2an^2}[\cos nt]_{b-a}^{b+a}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi a n^2}[\cos n(b+a) - \cos n(b-a)]$$

$$= \frac{2}{\pi a n^2}\sin(na)\sin(nb) \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad a_n = \frac{2}{\pi a n^2}\sin(na)\sin(nb)}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{b-a} dt - \frac{1}{2a}\int_{b-a}^{b+a}[t-(a+b)]\,dt\right] = \frac{2}{\pi}\left[b-a-\frac{1}{2a}\int_{-2a}^{0} u\,du\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[b-a-\frac{1}{2a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-2a}^{0}\right] = \frac{2}{\pi}[b-a+a] = \frac{2b}{\pi} \qquad \boxed{a_0 = \frac{2b}{\pi}}$$

Remarque : $c_0 = \frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne de f sur une période $[2\pi]$: $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\left[b-a+\frac{2a}{2}\right]$

f est de classe C^1 par morceaux sur une période $[2\pi]$, donc, d'après le théorème de Dirichlet :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : \quad f(t) = \frac{b}{\pi} + \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)\sin(nb)}{n^2}\cos(nt)}$$

3) g est la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$: $g(t) = f(\pi t)$

g est 2-périodique, paire et continue : période $T_1 = 2$, pulsation : $\omega_1 = \pi$

$$b_n(g) = 0 \quad \text{et} \quad a_n(g) = 2\int_0^1 f(\pi t)\cos(n\pi t)\,dt \underset{\substack{\pi t = x \\ \pi dt = dx}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt \, dt = a_n(f).$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : \quad g(t) = \frac{b}{\pi} + \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(na)\sin(nb)}{n^2}\cos(n\pi t)}$$

Remarque : ce résultat s'obtient directement à partir de l'expression de $f(t)$.

4°/ 4.1.1 : Pour $t = 0$:

$$f(0) = 1 = \frac{b}{\pi} + \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\sin(nb)}{n^2}$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)\sin(nb)}{n^2} = \frac{a(\pi - b)}{2}}$$

4.1.2 : Formule de PARSEVAL :

$$\frac{b^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\,\frac{4}{\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)\sin^2(nb)}{n^4} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt$$

Or,

$$\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt = \int_0^{b-a} dt + \frac{1}{4a^2}\int_{b-a}^{b+a} [t-(a+b)]^2\,dt = b - a + \frac{1}{4a^2}\int_{-2a}^{0} u^2\,du$$

$$= b - a + \frac{1}{4a^2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-2a}^{0} = b - a + \frac{2a}{3} = b - \frac{a}{3}$$

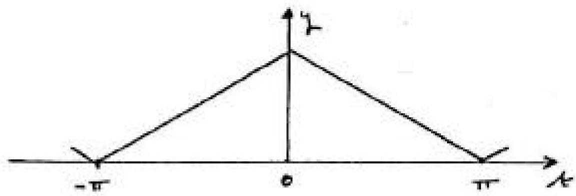
d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)\sin^2(nb)}{n^4} = \frac{\pi^2 a^2}{2}\left[\frac{1}{\pi}\left(b - \frac{a}{3}\right) - \frac{b^2}{\pi^2}\right] = \frac{a^2(3b\pi - a\pi - 3b^2)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)\sin^2(nb)}{n^4} = \frac{a^2(3b\pi - a\pi - 3b^2)}{6}$$

4.2 Pour $a = b = \frac{\pi}{2}$: $\sin na = \sin nb = \sin n\frac{\pi}{2} \begin{cases} = 0 \text{ si } n = 2p \\ = \sin\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos p\pi = (-1)^p \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$

alors : $b - a = 0$ et $b + a = \pi$



4.2.1 : Pour $a = b = \frac{\pi}{2}$, 4.1.1 s'écrit :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

4.2.2 : Pour $a = b = \frac{\pi}{2}$, 4.1.2 s'écrit :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

II $f(t) \begin{cases} = e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}_+^*$.   rappel : $f_{reg}(t) = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right], \forall t \in \mathbb{R}$.

1°/ 1.1 • $\forall \nu \in \mathbb{R}$: $\hat{f}(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-2i\pi\nu t} dt = \left[\frac{e^{-(a+2i\pi\nu)t}}{-(a+2i\pi\nu)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2i\pi\nu}$

car : $\left| e^{-(a+2i\pi\nu)t} \right| = e^{-at} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

• $g(t) = f(-t)$

changement d'échelle (avec $k=-1$) : $\forall \nu \in \mathbb{R}$: $\hat{g}(\nu) = \frac{1}{|-1|} \hat{f}\left(\frac{\nu}{-1}\right) = \hat{f}(-\nu) = \frac{1}{a - 2i\pi\nu}$

donc :

$\forall \nu \in \mathbb{R}$: $\boxed{\hat{f}(\nu) = \frac{1}{a+2i\pi\nu} \quad , \quad \hat{g}(\nu) = \frac{1}{a-2i\pi\nu}.}$

1.2 : $\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, c.à.d : $\forall \nu \in \mathbb{R}$: $\widehat{f*g}(\nu) = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$.

$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$, c.à.d : $\forall \in \mathbb{R}$: $\widehat{f+g}(\nu) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$

Il en résulte que : $\widehat{f+g} = 2a \, \widehat{f*g}$

et par T de F inverse : $\boxed{f + g = 2a\,(f * g)}$ remarque : $f*g$ et $(f+g)_{reg}$ sont

fonctions régularisées.   continues sur $\mathbb{R}$

2°/ $n \in \mathbb{N}$. φ_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(t) = t^n f(t)$

2.1 : $\varphi_1(t) = t f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\varphi}_1(\nu) = -\frac{1}{2i\pi} \hat{f}'(\nu) = -\frac{1}{2i\pi} \frac{-2i\pi}{(a+2i\pi\nu)^2} = \frac{1}{(a+2i\pi\nu)^2}$.

Soit, $\forall \nu \in \mathbb{R}$: $\boxed{\hat{\varphi}_1(\nu) = \frac{1}{(a+2i\pi\nu)^2}}$

Par récurrence immédiate :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\hat{\varphi}_n(\nu) = \frac{n!}{(a+2i\pi\nu)^{n+1}}}$, $\forall \nu \in \mathbb{R}$.

2.2 : $\forall \nu \in \mathbb{R}$: $\widehat{\varphi_n * \varphi_m}(\nu) = \hat{\varphi}_n(\nu) \cdot \hat{\varphi}_m(\nu) = \frac{n!\, m!}{(a+2i\pi\nu)^{n+m+2}}$

$= \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!} \quad \frac{(n+m+1)!}{(a+2i\pi\nu)^{n+m+2}} = \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!} \hat{\varphi}_{n+m+1}(\nu)$

d'où, par T de F inverse :

$\boxed{\varphi_n * \varphi_m = \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!} \varphi_{n+m+1}}$: $\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!} t^{n+m+1} f(t) \end{array}$

3/ 3.1 : $\forall t \in \mathbb{R}$: $(\ell * f)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(x) f(t-x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t-x)\,dx = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(u)\,du$

- si $t+\frac{1}{2} \leq 0$, c.à.d $t \leq -\frac{1}{2}$, alors $(\ell * f)(t) = 0$
- si $t-\frac{1}{2} \leq 0 \leq t+\frac{1}{2}$, c.à.d $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, alors :

$$(\ell * f)(t) = \int_{0}^{t+1/2} e^{-au}\,du = \left[\frac{e^{-au}}{-a}\right]_0^{t+1/2} = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(t+\frac{1}{2})}\right]$$

- si $t-\frac{1}{2} \geq 0$, c.à.d $t \geq \frac{1}{2}$, alors :

$$(\ell * f)(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+1/2} e^{-au}\,du = \left[\frac{e^{-au}}{-a}\right]_{t-1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{a}\left[e^{-a(t-1/2)} - e^{-a(t+1/2)}\right]$$

$$= \frac{1}{a} e^{-at}\left[e^{a/2} - e^{-a/2}\right] = \frac{2}{a}\,\mathrm{sh}\frac{a}{2}\, e^{-at}$$

$$\boxed{(\ell * f)(t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t \leq -\frac{1}{2} \\ = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(t+1/2)}\right] & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ = \frac{2}{a}\,\mathrm{sh}\frac{a}{2}\, e^{-at} & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}}$$

3.2 : Comme $g(t) = f(-t)$, on a : $(\ell * g)(t) = (\ell * f)(-t)$, car ℓ est paire.

c.à.d :

$$(\ell * g)(-t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(-t+\frac{1}{2})}\right] & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ = \frac{2}{a}\,\mathrm{sh}\frac{a}{2}\, e^{+at} & \text{si } t \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\boxed{[\ell * (f+g)](t) \begin{cases} = \frac{2}{a}\,\mathrm{sh}\frac{a}{2}\, e^{at} & \text{si } t \leq -\frac{1}{2} \\ = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(t+1/2)}\right] + \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(-t+\frac{1}{2})}\right] & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ = \frac{2}{a}\left[1 - e^{-a/2}\,\mathrm{ch}\, at\right] & \\ = \frac{2}{a}\,\mathrm{sh}\frac{a}{2}\, e^{-at} & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}}$$

4) h est définie par : $h(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

4.1 : $\forall t \in \mathbb{R}$: $(f+g)(t) = f(t) + f(-t) = e^{-a|t|}$.

D'après le 1) : $(f+g)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f+g}(\nu) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$.

On remarque que : $h(t) = \frac{1}{2a}\widehat{f+g}\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{1}{a^2+t^2}$ paire et réelle

Il en résulte que : $\hat{h}(\nu) = \frac{1}{2a}\widehat{\widehat{f+g}\left(\frac{t}{2\pi}\right)}(\nu) = \underbrace{\frac{2\pi}{2a}}_{\text{chgt d'échelle}}\widehat{\widehat{f+g}}(2\pi\nu) = \frac{2\pi}{2a}(f+g)(2\pi\nu)$.

Soit : $\hat{h}(\nu) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\nu|}$

$$\boxed{\forall \nu \in \mathbb{R} : \hat{h}(\nu) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\nu|}}$$

4.2 : $\forall t \in \mathbb{R}$: $u(t) = \frac{t}{(a^2+t^2)^2} = -\frac{1}{2}h'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \forall \nu \in \mathbb{R}$: $\hat{u}(\nu) = -\frac{1}{2}2i\pi\nu\hat{h}(\nu)$.

Soit :
$$\boxed{\forall \nu \in \mathbb{R} : \hat{u}(\nu) = -i\pi^2\frac{\nu}{a}e^{-2\pi a|\nu|}}$$

5) 5.1 : $I = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(a^2+t^2)^2}\sin t\,dt$.

$\hat{u}(\nu) = -2i\int_0^{+\infty}\frac{t}{(a^2+t^2)^2}\sin 2\pi\nu t\,dt$,
u est impaire et réelle

donc : $I = -\frac{1}{2i}\hat{u}\left(\frac{1}{2\pi}\right) = -\frac{1}{2i}\times\left(-i\frac{\pi}{2a}e^{-a}\right) = \frac{\pi}{4a}e^{-a}$.

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4a}e^{-a}} = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(a^2+t^2)^2}\sin t\,dt.$$

5.2 : Formule de Plancherel-Parseval appliquée à h : $\int_{-\infty}^{+\infty}h^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}^2(\nu)\,d\nu$.

h étant paire : $2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(a^2+t^2)^2}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{\pi^2}{a^2}e^{-4\pi a\nu}d\nu$

Soit : $J = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(a^2+t^2)^2}dt = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\frac{e^{-4\pi a\nu}}{-4\pi a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4a^3}$.

$$\boxed{J = \frac{\pi}{4a^3}} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+t^2)^2}.$$

6) $y(t) - \frac{1}{2}[y(t+1) + y(t-1)] = (\ell''*\Delta)(t)$ hyp. $y \in \mathcal{L}^1$ et ℓ fonction telle que ℓ et ℓ' sont continues sur $\mathbb{R}$.

Par T de F : $\hat{y}(\nu) - \frac{1}{2}[\hat{y}(\nu)e^{-2i\pi\nu} + \hat{y}(\nu)e^{2i\pi\nu}] = \widehat{\ell''}(\nu).\hat{\Delta}(\nu)$

Soit $\hat{y}(\nu)\left[1 - \frac{1}{2}(e^{-2i\pi\nu}+e^{2i\pi\nu})\right] = -4\pi^2\nu^2\hat{\ell}(\nu).\begin{cases}\left(\frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 & \text{pour } \nu \neq 0\\ 1 & \text{pour } \nu = 0\end{cases}$

$\hat{y}(\nu)[1 - \cos 2\pi\nu] = -4\sin^2\pi\nu\,\hat{\ell}(\nu)$ pour $\nu \neq 0$.

$\hat{y}(\nu).2\sin^2\pi\nu = -4\sin^2\pi\nu\,\hat{\ell}(\nu)$

$\hat{y}(\nu) = -2\hat{\ell}(\nu)$ d'où : $\boxed{y(t) = -2\ell(t)}$