

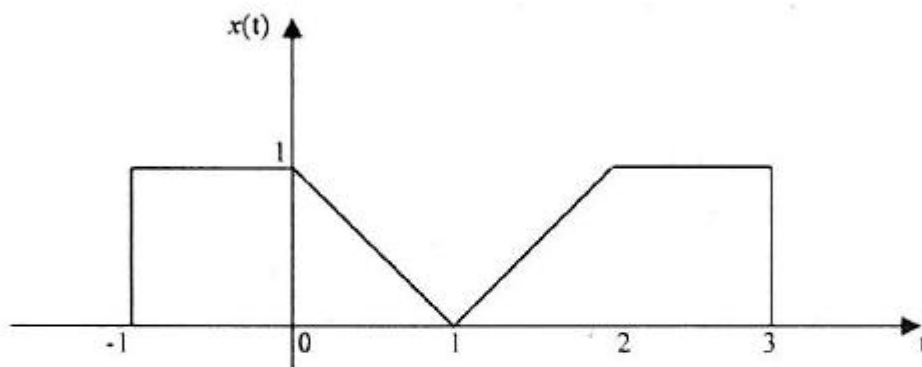
Théorie du signal

3N et 3S – Devoir – durée : 2H

Exercice

$$\text{Soit } \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad r(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère maintenant le signal $x(t)$ représenté ci-dessous :



1. Exprimer $x(t)$ en fonction de $\Pi(t)$ et de $r(t)$.
2. Calculer l'énergie totale E_x et la puissance moyenne totale P_x de $x(t)$.
3. Représenter graphiquement les signaux :

$$s_1(t) = x(-t+2); \quad s_2(t) = 2x(-t+2); \quad s_3(t) = x\left(\frac{-t+2}{2}\right); \quad s_4(t) = x(2t); \quad s_5(t) = x(2t-3)$$

4. On considère $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-t - 4n)$

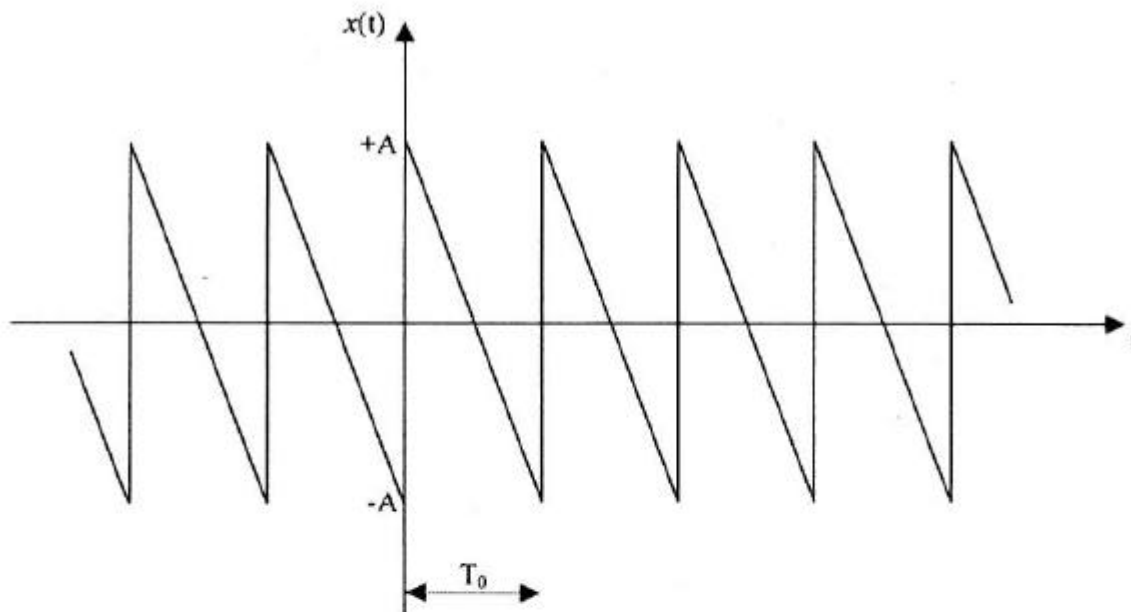
- 4.1 Représenter graphiquement $y(t)$.
- 4.2 Quelle est la puissance moyenne totale de $y(t)$?

5. Soit $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-t - 4n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - 4n)$

- 5.1 Le signal $g(t)$ est-il périodique ? Justifier la réponse.
- 5.2 Représenter $g(t)$ et confronter les résultats.

Problème

On considère le signal T_0 -périodique $x(t)$ représenté sur la figure suivante :



1. Donner l'expression de $x(t)$ dans l'intervalle $[0, T_0]$ et calculer sa puissance moyenne totale P_x .
2. Montrer que $x(t)$ admet une décomposition en série de Fourier.
3. Donner l'expression des coefficients C_n de la décomposition de $x(t)$. *NB. Le calcul complet est demandé. Un résultat obtenu par simple recours à une table ne sera pas pris en compte. Conseil : On pourra utiliser la relation $\int_0^x u \cdot e^{-\alpha u} du = -\frac{1}{\alpha} x \cdot e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha x} - 1)$ $\alpha > 0$.*
4. Donner une représentation graphique du spectre d'amplitude (et de son enveloppe) et du spectre de phase de $x(t)$. Que constate-t-on ?
5. Montrer que $x(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \cdot \sin\left(2\pi \frac{n \cdot t}{T_0}\right)$$

En déduire la puissance P_1 du fondamental et les puissances P_2 et P_3 des harmoniques 2 et 3.

6. Le signal $x(t)$ est émis dans un canal de transmission. Quelles sont les contraintes sur ce canal de transmission si on souhaite que seuls les harmoniques ayant une amplitude inférieure à 1% du fondamental soient négligés ?
7. On se propose maintenant de transmettre le signal périodique $x(t)$ par l'intermédiaire des coefficients de sa série de Fourier. On suppose que amplitude et phase sont codées séparément. Dans l'hypothèse où 90% de la puissance totale suffit à reconstituer la forme du signal $x(t)$, calculer le nombre minimum de coefficients à transmettre.