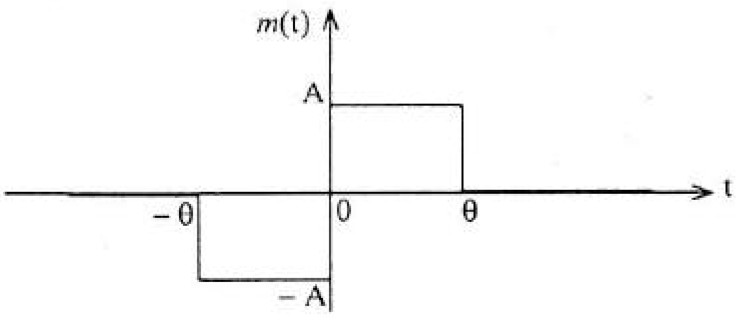
Théorie du signal

3N et 3S – Devoir – durée : 2H

Exercice : Paul Dirac et Joseph Fourier dans la généralisation de la transformée de Fourier par l'emploi des distributions.

1. On considère le signal m(t) représenté ci-dessous :

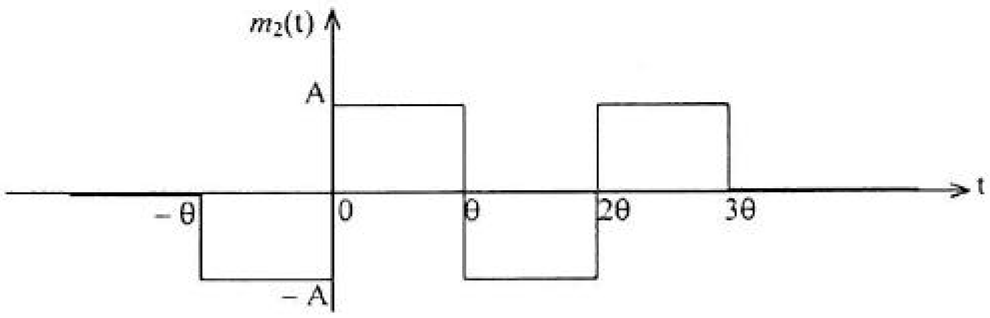


1.1. Exprimer $m(t)$ en fonction de A et $\Pi_\theta(t)$, où $\Pi_\theta(t)$ désigne la fonction "Porte" d'amplitude unité et de largeur θ centrée à l'origine.

1.2. En déduire $M(\nu)$ le spectre du signal $m(t)$.

1.3. Calculer et représenter graphiquement le spectre d'amplitude et le spectre de phase du signal $m(t)$.

2. Soit $m_2(t)$ le signal à deux motifs représenté ci-dessous :



2.1. Ecrire $m_2(t)$ sous la forme du produit de convolution de $m(t)$ et d'une autre fonction $f(t)$ à déterminer.

2.2. En déduire l'expression du spectre de $m_2(t)$ en fonction de $M(\nu)$.

3. On considère maintenant le signal $s_p(t)$ qui est la version périodisée de $m(t)$ à la période $T_0 = 2\theta$.

3.1. Représenter graphiquement $s_p(t)$ et calculer son énergie totale E_s et sa puissance moyenne totale P_s. Peut-on utiliser l'intégrale de Fourier comme outil mathématique pour calculer le spectre $S(\nu)$ de $s_p(t)$? Justifier la réponse.

3.2. Ecrire $s_p(t)$ sous la forme du produit de convolution de $m(t)$ et d'une autre fonction $p(t)$ à déterminer. Calculer $P(\nu)$ le spectre de $p(t)$.

3.3. En déduire $S(\nu)$ le spectre de $s_p(t)$ et représenter graphiquement son amplitude $|S(\nu)|$.

3.4. Rappeler l'expression de $s_p(t)$ en fonction des coefficients de sa décomposition en Série de Fourier C_n. En déduire la relation liant $M(\nu)$ aux coefficients C_n. Commenter.

Problème : Détection d'un signal Radar par corrélation

Dans un radar de veille équipé d'un système *émission-réception*, on utilise le procédé de détection suivant : on émet une impulsion de durée brève θ à intervalle régulier T_R. Après réflexion sur une cible éventuelle, l'impulsion revient vers le détecteur du radar. Le détecteur effectue l'intercorrélation du signal reçu avec le signal émis. On suppose que le signal reçu n'est ni déformé ni bruité mais qu'il a subi une atténuation α et arrive sur le détecteur avec un retard t_0; α et t_0 étant des constantes positives. Dans tout le problème, la cible et le radar sont supposés fixes. Pour les représentations graphiques, on prendra toujours $t_0 \gg T_R > 2\theta$.

1ère partie : Forme des impulsions

1.1 Calculer et représenter graphiquement le signal $g(t)$ tel que

$$g(t) = \Pi_a(t - \frac{a}{2}) * u(t) \quad ; \; a \text{ étant un réel strictement positif}$$

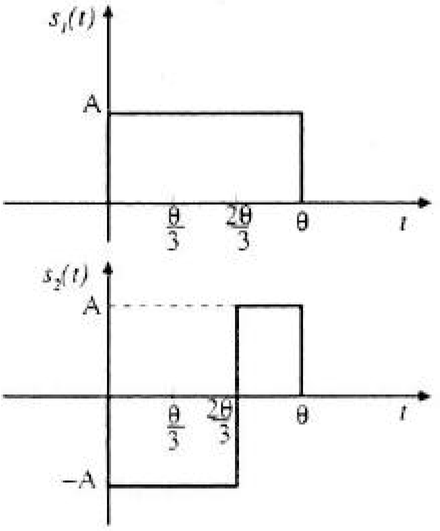
où $*$ désigne le produit de convolution, les signaux $\Pi_\theta(t)$ et $u(t)$ sont définis par

$$\Pi_\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

1.2 En déduire et représenter graphiquement le signal $f(t)$ tel que

$$f(t) = \Pi_a(t - \frac{a}{2}) * \Pi_b(t - \frac{b}{2}) \quad ; \; a \text{ et } b \text{ étant des réels strictement positifs tels que } b > a.$$

1.3 On suppose que le signal émis est formé d'une seule impulsion de la forme $s_1(t)$ ou $s_2(t)$ de durée finie θ ; $s_1(t)$ et $s_2(t)$ étant représentés sur la figure suivante :



1.3.1 Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont-ils à énergie E_s finie ou puissance moyenne P_s finie ? Justifier la réponse.

1.3.2 Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont-ils égaux[1] ? Justifier la réponse.

[1] Dans l'espace vectoriel des signaux, 2 signaux sont dits égaux si l'énergie de leur différence est nulle

2ème partie : Choix de l'impulsion à émettre

On émet un signal $s(t)$ quelconque.

2.1 Donner l'expression du signal reçu $x(t)$ en fonction de $s(t)$, α et t_0. Qu'observe-t-on réellement sur le détecteur si le signal n'a pas été réfléchi sur une cible ?

2.2. Montrer que le signal $y(t)$ obtenu en sortie du détecteur peut s'exprimer à l'aide du produit de convolution de l'autocorrélation $\Gamma_s(t)$ de $s(t)$ et d'un signal que l'on déterminera.

2.3. Montrer que $y(t)$ permet d'estimer la distance d entre l'emetteur et la cible. Que vaut cette distance si $t_0 = 0.1\ ms$ sachant que la célérité des ondes électromagnétiques dans le milieu de propagation considéré est de $c = 3.10^8\ m/s$.

2.4. Déterminer et représenter graphiquement le signal $y_1(t)$ obtenu en sortie du détecteur lorsque $s_1(t)$ est émis.

2.5. On veut déterminer le signal $y_2(t)$ obtenu en sortie du détecteur lorsque $s_2(t)$ est émis :

2.5.1 Exprimer $s_2(t)$ comme la somme de deux portes.

2.5.2 Calculer la fonction d'autocorrélation $\Gamma_{s_2}(t)$ de $s_2(t)$ à l'aide du produit de convolution. Représenter graphiquement $\Gamma_{s_2}(t)$.

2.5.3 En déduire et représenter graphiquement le signal $y_2(t)$.

2.6. Sachant que dans un environnement pollué par le bruit, le pic de corrélation est difficile à déterminer, lequel des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ aurait-on intérêt à choisir? Justifier la réponse en utilisant comme critère de choix sur le pic de corrélation : sa hauteur, la largeur de sa base et la présence ou non de lobes secondaires (négatifs ou positifs).